Algebra ISIM. Lista 12

1. Załóżmy, że wielomian $P(X) \in K[X]$ nie rozkłada się na iloczyn czynników niższego stopnia pochodzących z $K[X]$. Niech $L = K[X]/J$, gdzie $J = \{Q(X) \in K[X] \mid P(X)|Q(X)\}$. Na tej przestrzeni ilorazowej określamy mnożenie wzorem $(Q(X) + J) \cdot (R(X) + J) = Q(X)R(X) + J$.
a) Udowodnij, że $\dim_K L = \deg P(X)$.
b) Udowodnij, że mnożenie na L jest dobrze określone.
c) Pokaż, że $(L, +, \cdot, 0 + J, 1 + J)$ jest ciałem.
d) Uzasadnij, że odwzorowanie $K \ni a \mapsto a + J \in L$ jest włożeniem ciał (jest różnowartościowe i zachowuje działania).

2. Niech $Q: V \to \mathbf{R}$ będzie nieujemnie określoną formą kwadratową na nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Udowodnij, że

$$\{v \in V \mid Q(v) = 0\} = \{v \in V \mid (\forall w \in V)(Q(v, w) = 0)\}.$$

---

3. (Najbardziej popularna definicja $V \otimes W$) Niech T będzie przestrzenią liniową o bazie $\{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$. Określamy podprzestrzeń $Z < T$ jako podprzestrzeń generowaną przez następujące wektory:

$$(v + v', w) - (v, w) - (v', w), \qquad v, v' \in V, w \in W$$

$$(v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \qquad v \in V, w, w' \in W$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w), \qquad v \in V, w \in W, \lambda \in K$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w), \qquad v \in V, w \in W, \lambda \in K.$$

Uzasadnij, że przestrzeń ilorazowa T/Z wraz z dwuliniowym odwzorowaniem

$$V \times W \ni (v, w) \mapsto (v, w) + Z \in T/Z$$

jest iloczynem tensorowym V i W (ma WJUF).

4. (Niekonstruktywna konstrukcja iloczynu tensorowego)
a) Niech $U = \prod_{\phi: V \times W \to Z} Z$, gdzie produkt jest wzięty po wszystkich dwuliniowych odwzorowaniach $\phi: V \times W \to Z$ z każdym możliwym Z. Odwzorowanie $\Phi: V \times W \to U$ jest diagonalne, tzn $\Phi(v, w) = (\phi(v, w))_\phi$. Określamy $T = \mathrm{Lin}(\Phi(V \times W))$. Uświadom sobie teoriomnogościowe problemy z tą definicją; następnie je zignoruj i uzasadnij, że przestrzeń T wraz z odwzorowaniem $\Phi: V \times W \to T$ jest iloczynem tensorowym V i W (ma WJUF).
b) Jak wykonać tę konstrukcję w zgodzie z obowiązująca teorią mnogości?

5. ($\dim V < \infty$) Złożenie izomorfizmu $Hom(V, V) \to V^* \otimes V$ z odwzorowaniem zadanym przez $V^* \otimes V \ni \phi \otimes v \mapsto \phi(v) \in K$ jest pewną świetnie Ci znaną funkcją endomorfizmu. Jaka to funkcja?

6. Udowodnij, że jeśli $B = (b_1, \ldots, b_d)$ jest bazą V, to $B_L = (1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_d)$ jest bazą $V_L = L \otimes_K V$. (L to ciało zawierające ciało K.)

7. Zinterpretuj dwuliniowe odwzorowanie $V \times W \to Z$ jako element przestrzeni $V^* \otimes W^* \otimes Z$. Niech $V = M_{n \times n}(K)$; zinterpretuj operację mnożenia macierzy $n \times n$ jako tensor mnożenia: element $V^* \otimes V^* \otimes V$.

   Tensor mnożenia jest zwykle wyrażany jako suma n^3 tensorów rozkładalnych (tyle mnożeń występuje we wzorze na iloczyn macierzy $n \times n$). Tymczasem V. Strassen wykrył, że tensor mnożenia macierzy 2×2 da się zapisać jako suma siedmiu tensorów rozkładalnych; w efekcie można mnożyć macierze $n \times n$ wykonując $O(n^{\log_2 7})$ mnożeń.

Od tej chwili do końca listy zakładamy, że charakterystyka K jest równa 0, tzn. że dla każdego naturalnego n mamy $n! \neq 0$ w ciele K.

8. Elementowi $\sigma \in S_n$ grupy permutacji przypisujemy endomorfizm $\ell_\sigma: V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Dany jest on przez warunek $\ell_\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$.
a) Starannie uzasadnij, że ℓ_σ jest dobrze określonym przekształceniem liniowym.
b) Pokaż, że dla $\sigma, \tau \in S_n$ zachodzi $\ell_\sigma \circ \ell_\tau = \ell_{\sigma\tau}$.

Definiujemy przestrzenie tensorów symetrycznych i tensorów antysymetrycznych jako

$$S^nV = \{t \in V^{\otimes n} \mid (\forall \sigma \in S_n)(\ell_\sigma(t) = t)\}, \qquad \Lambda^nV = \{t \in V^{\otimes n} \mid (\forall \sigma \in S_n)(\ell_\sigma(t) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{t})\}.$$

(Np. $v\otimes w+w\otimes v \in S^2V$, $v\otimes w-w\otimes v \in \Lambda^2V$.) Definiujemy też odwzorowania symetryzacji $S\colon V^{\otimes n} \to S^nV$ i antysymetryzacji $A\colon V^{\otimes n} \to \Lambda^nV$ wzorami

$$S(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \ell_\sigma(t), \qquad A(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\ell_\sigma(\mathrm{t}).$$

(Np. $S(v\otimes w) = \frac{1}{2}(v\otimes w + w\otimes v)$, $A(v\otimes w) = \frac{1}{2}(v\otimes w - w\otimes v)$.)

9. Udowodnij, że S, A są rzutami na S^nV, Λ^nV: $S^2 = S$, $\mathrm{Im}(S) = S^nV$, $A^2 = A$, $\mathrm{Im}(A) = \Lambda^nV$.
10. Udowodnij, że $V^{\otimes 2} \cong S^2V \oplus \Lambda^2V$. Czy dla wyższych potęg tensorowych też będzie to prawdą?

Algebrę tensorową, algebrę symetryczną (bozonów) i algebrę zewnętrzną (fermionów) przestrzeni liniowej V określamy jako

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}, \qquad SV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^nV, \qquad \Lambda V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^nV.$$

($V^{\otimes 0} = S^0V = \Lambda^0V = K$.)

11. Uzasadnij, że wzór
$$(v_1\otimes\ldots\otimes v_n, v_{n+1}\otimes\ldots\otimes v_{n+k}) \mapsto v_1\otimes\ldots\otimes v_n\otimes v_{n+1}\otimes\ldots\otimes v_{n+k}$$
wyznacza dobrze określone dwuliniowe odwzorowanie $V^{\otimes n}\times V^{\otimes k} \to V^{\otimes(n+k)}$. Kolekcja tych odwzorowań (dla wszystkich możliwych n, k) rozszerza się jednoznacznie do dwuliniowego mnożenia $TV\times TV \to TV$, zwykle oznaczanego po prostu $\otimes$.
12. Uzasadnij, że
 a) wzór $p\cdot q := S(p\otimes q)$ (dla p, q rozkładalnych) wyznacza dwuliniowe mnożenie (symetryczne) w SV;
 a) wzór $p\wedge q := A(p\otimes q)$ (dla p, q rozkładalnych) wyznacza dwuliniowe mnożenie (zewnętrzne) w ΛV.
13. Uzasadnij, że $A(A(p)\otimes q) = A(p\otimes q) = A(p\otimes A(q))$ (dla dowolnych rozkładalnych p, q). Wywnioskuj stąd, że iloczyn zewnętrzny w ΛV jest łączny. Zrób to samo dla algebry symetrycznej SV.
14. Uzasadnij, że jeśli $t = v_1\otimes\ldots\otimes v_n$ i $v_i = v_j$ dla pewnych $i\neq j$, to $A(t) = 0$. (W szczególności $v\wedge v = 0$ dla $v\in V$.)
15. Uzasadnij, że dla rozkładalnego tensora t i permutacji $\sigma\in S_n$ mamy $A(\ell_\sigma(t)) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{A(t)}$, $S(\ell_\sigma(t)) = S(t)$. (W szczególności $v\wedge w = -w\wedge v$, $v\cdot w = w\cdot v$ dla $v, w\in V$.)
16. Uzasadnij, że $v_1\wedge\ldots\wedge v_n = A(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)$, $v_1\cdot\ldots\cdot v_n = S(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)$. (Lewe strony są dobrze określone dzięki łączności mnożenia.)
17. Niech $\dim V = d < \infty$, i niech $B = (b_1,\ldots,b_d)$ będzie bazą V.
 a) Uzasadnij, że $\{b_{i_1}\cdot\ldots\cdot b_{i_n} \mid 1\le i_1\le\ldots\le i_n\le d\}$ jest bazą S^nV. Wyznacz $\dim S^nV$ i $\dim SV$.
 a) Uzasadnij, że $\{b_{i_1}\wedge\ldots\wedge b_{i_n} \mid 1\le i_1<\ldots<i_n\le d\}$ jest bazą Λ^nV. Wyznacz $\dim\Lambda^nV$ i $\dim\Lambda V$.
18. Uzasadnij, że $v_1,\ldots,v_n\in V$ są lnz $\iff$ $v_1\wedge\ldots\wedge v_n\neq 0$.
19. Udowodnij, że jeśli $t\in\Lambda^2K^3$, to $t = v\wedge w$ dla pewnych $v, w\in K^3$.
20. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Lin}(v_1,\ldots,v_n) = \mathrm{Lin}(w_1,\ldots,w_n)$, to $v_1\wedge\ldots\wedge v_n$ i $w_1\wedge\ldots\wedge w_n$ są proporcjonalne w Λ^nV. Czy jest też odwrotnie?
21. Niech $F\colon V\to W$ będzie liniowe. Określmy $F^{\otimes n}\colon V^{\otimes n}\to W^{\otimes n}$ przez warunek $F^{\otimes n}(v_1\otimes\ldots\otimes v_n) = F(v_1)\otimes\ldots\otimes F(v_n)$. W oparciu o tą definicję określ $TF\colon TV\to TW$, $S^nF\colon S^nV\to S^nW$, $\Lambda^nF\colon\Lambda^nV\to\Lambda^nW$.
22. Udowodnij, że
$$\chi_F(x) = \sum_{n=0}^{d}\mathrm{tr}(\Lambda^{d-n}F)(-x)^n.$$
23. Zinterpretuj:
 a) formę kwadratową na przestrzeni V – jako element $S^2(V^*)$;
 b) funkcję wielomianową na przestrzeni V – jako element $S(V^*)$;
 c) wyznacznik (funkcję układu d wektorów z d-wymiarowej przestrzeni V) – jako element $\Lambda^d(V^*)$.
24. Zbadaj, czy $\mathrm{Lin}(\{v\otimes\ldots\otimes v \mid v\in V\}) = S^nV$.