Algebra ISIM. Lista 2

1. Z tw. Bezout wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1, 2, 3, \ldots, 14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2 \ldots, P(14) = a_{14}$.

2. Oblicz wymiary następujących przestrzeni: $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$, $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^{0} P(x)dx = P'(-7) = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100}(-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$.

3. Udowodnij lub obal:

a) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lz.

b) Jeśli zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ też jest lz.

c) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lnz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lnz.

4. Niech macierzą przekształcenia $F : V \to W$ względem baz: (e_1, e_2, e_3) przestrzeni V i (f_1, f_2) przestrzeni W, będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

5. Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = (P(-1), P'(0), P(1))^\top$. Niech $B = \{1, X, X^2\}$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$. (a) Znajdź $M_E^B(F)$. (b) Niech $C = \{E_1 + 2E_3, E_3, E_2 + E_1\}$. Znajdź $m_C^B(F)$. (c) Czy F jest odwracalne?

6. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F((x, y, z)^\top) = (2x + z, x + y + z, y - z)^\top$. Niech $B = ((1, 0, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top, (1, 1, 0)^\top)$. Znajdź (jeśli to możliwe) bazę C przestrzeni $\mathbf{R}^3$, taką że (a) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Wiadomo, że B, C, D to bazy $\mathbf{R}^3$, zaś $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Co więcej, $B = ((1, 1, 1)^\top, (0, 1, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top)$, $m_D^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Znajdź D.

8. Czy jest odwracalne przekształcenie $\mathbf{R}_{22}[X] \ni P \mapsto P'' + 3P' + 2P \in \mathbf{R}_{22}[X]$?

9. Znajdź macierze odwrotne do następujących:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Udowodnij, że jeśli $F : V \to W$ jest monomorfizmem, to istnieje przekształcenie liniowe $G : W \to V$, takie że $G \circ F = \mathrm{Id}$ (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?). Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Udowodnij, że jeśli $W < V$, zaś $f : W \to U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to U$, takie że f jest obcięciem F do W. Znajdź takie F dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] : P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $f(P) = \frac{P(X)}{X-3}$.

---

12. Dla przestrzeni liniowych V, W nad ciałem K oznaczmy przez $\mathrm{Hom}(V, W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych z V do W. Przekształcenia takie można dodawać i mnożyć przez skalary. Sprawdź, że $\mathrm{Hom}(V, W)$ z tymi operacjami jest przestrzenią liniową.

13. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o wymiarach n, k i bazach B, C. Zdefiniuj dodawanie i mnożenie przez skalary na zbiorze macierzy $M_{k\times n}(K)$ tak, by funkcja $\Phi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{k\times n}(K)$ była izomorfizmem przestrzeni liniowych. Jaki jest wymiar przestrzeni $\mathrm{Hom}(V, W)$?

14. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe F jest funkcją odwracalną (tzn. bijekcją), to funkcja odwrotna do F też jest przekształceniem liniowym.

15. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Określmy $\ker(A) = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$ (jest to jądro przekształenia $F_A\colon K^n \to K^n$ zadanego w bazie standardowej macierzą A).
 a) Zauważ, że $\ker(A)$ nie zmienia się, gdy A poddajemy operacjom wierszowym.
 b) Uzasadnij, że jeśli operacjami wierszowymi da się przerobić macierz A na macierz z zerowym wierszem, to A nie jest odwracalna.
 c) Uzasadnij, że operacjami wierszowymi można przerobić A albo na I, albo na macierz z zerowym wierszem. Opisz algorytm, który to robi.

16. Udowodnij, że $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (o ile $ad - bc \neq 0$).

17. Dla podzbiorów A, B przestrzenie liniowej V określamy *sumę kompleksową* $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Niech $W < V$, $W' < V$.
 a) Uzasadnij, że $W + W' < V$.
 b) Uzasadnij, że $W + W' = \mathrm{Lin}(W \cup W')$.
 c) Udowodnij, że $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$.

18. Czy jest prawdą, że dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni U, V, W dowolnej przestrzeni liniowej zachodzi wzór (udowodnij lub podaj kontrprzykład):

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)$$

Uogólnij na większą liczbę składników.

19. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe. Udowodnij, że istnieją bazy B, C przestrzeni V, W, takie że macierz $A = m_C^B(F)$ ma poza przekątną zera, a na przekątnej do pewnego miejsca jedynki, a dalej zera. (Dokładniej: $A_i^i = 1$ dla $i \le \dim \mathrm{Im(F)}$; $A_j^i = 0$ dla $i \neq j$ oraz dla $i = j > \dim \mathrm{Im(F)}$.)

20. Załóżmy, że $B = (b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Niech $C = (c_1, \ldots, c_n)$ będą dane przez $c_j = \sum_i A_j^i b_i$, dla pewnej macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$. Udowodnij, że C jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą odwracalną.

---

21. Niech $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie izometrią (funkcją zachowującą odległości punktów), taką że $F(0) = 0$. Udowodnij, że F jest przekształceniem liniowym.

22. Udowodnij, że identyczność jest jedynym endomorfizmem ciała $\mathbf{R}$. To znaczy, pokaż, że jeśli $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia warunki

$$(\forall x, y \in \mathbf{R})(\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)), \qquad (\forall x, y \in \mathbf{R})(\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1,$$

to $\varphi = \mathrm{Id}$ – czyli $(\forall x \in \mathbf{R})(\varphi(x) = x)$.

23. Udowodnij, że jeśli $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jest bijekcją przeprowadzającą proste na proste i spełniającą $F(0) = 0$, to F jest przekształceniem liniowym:
 a) Uzasadnij, że jeśli dodatkowo wiemy, że $F\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$ i $F\binom{0}{1} = \binom{0}{1}$, to F ograniczone do osi OX jest endomorfizmem $\mathbf{R}$. Dalej, pokaż że takie F jest identycznością na całym R^2.
 b) Udowodnij tezę zadania w pełnej ogólności używając wyniku z punktu a).

24. Uzasadnij, że jeśli w poprzednim zadaniu pominąć założenie $F(0) = 0$, to wciąż prawdą jest, że F musi być przekształceniem afinicznym, tzn. złożeniem przekształcenia liniowego i translacji.

25. Podaj przykład przestrzeni liniowej (nieskończenie wymiarowej) V i jej endomorfizmu $F : V \to V$, który (a) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem; (b) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem.

26. Oblicz wymiar przestrzeni
 a) $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$;
 b) $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = \ldots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$.

27. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$. Niech też $A = (A_1, \ldots, A_n) \in M_{k\times n}(K)$. Rozważmy pytanie: "Czy istnieją bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W, takie że $m_C^B(F) = A$?" Udowodnij, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \mathrm{Lin}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \mathrm{Im(F)}$.