Algebra ISIM. Lista 3

1. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n \times n$ jeśli:

a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny? b) każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j}, $c \neq 0$?

c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?

d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?

4. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

6. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

7. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Przedstaw macierz $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.

9. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.

10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $\phi\colon V \times V \to K$ funkcją dwuliniową.
a) Uzasadnij, że jeśli ϕ jest alternująca ($\phi(X, X) = 0$), to jest też ona antysymetryczna ($\phi(X, Y) = -\phi(Y, X)$).
b) Uzasadnij, że jeśli ϕ jest antysymetryczna oraz $1 + 1 \neq 0$, to ϕ jest alternująca.

11. Podaj przykład niezerowej funkcji $\Phi : M_{3\times 2}(K) \to K$, która jest wieloliniową i antysymetryczną funkcją kolumn; uzasadnij, że nie istnieje funkcja $\Psi : M_{2\times 3}(K) \to K$ o tych własnościach.

12. Sprawdź, że $AA^\vee = A^\vee A = (\det A)I$.

13. Udowodnij wzór Cauchy'ego–Bineta: $\det(AB) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_n\leq k} A_{i_1,\ldots,i_n} B^{i_1,\ldots,i_n}$.
(Zakładamy, że: $A \in M_{n\times k}(K)$; $B \in M_{k\times n}(K)$; $A_{i_1,\ldots,i_n}$ to macierz utworzona z kolumn A o numerach $i_1, \ldots, i_n$; $B^{i_1,\ldots,i_n}$ to macierz utworzona z wierszy B o numerach $i_1, \ldots, i_n$)

14. Udowodnij, że jeśli A, B są macierzami kwadratowymi, oraz $AB = I$, to i $BA = I$.

15. Udowodnij, że jeśli $F : V \to V$, a B i C są bazami V, to $\det(m_B(F)) = \det(m_C(F))$.

16. Ciąg Fibonacciego jest zadany rekurencyjnie wzorami $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu według następującego planu:
a) Niech $X_n = \binom{f_n}{f_{n+1}}$, $M = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. Pokaż, że $X_0 = \binom{1}{1}$, $X_{n+1} = MX_n$, $X_n = M^n X_0$.
b) Zdiagonalizuj macierz M: znajdź jej wartości własne i wektory własne i zapisz ją w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną.
c) Znajdź wzór na M^n i wywnioskuj z niego wzór na f_n.
d) Jak zmieni się odpowiedź, jeśli przyjąć $f_0 = 7$, $f_1 = 3$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

17. Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$, to kolumny P są wektorami własnymi macierzy A. (Zakładamy, że: $A, P, D \in M_{n\times n}(K)$; P jest odwracalna; D jest diagonalna.)

18. Uzasadnij, że dla dwóch wektorów $U, V \in \mathbf{R}^2$ zachodzi równoważność: $\det(U, V) > 0 \iff$ najkrótszy kąt obrotu od U do V jest przeciwzegarowy.

---

19. Wyznacz największą możliwą wartość wyznacznika 3×3, którego wszystkie wyrazy są co do wartości bezwzględnej nie większe od 1.

20. Oblicz podane wyznaczniki (w drugim z nich $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$):

$$\begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \ldots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \ldots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \ldots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

21. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

22. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \ldots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \ldots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1, \ldots, f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).

23. Spróbuj użyć odpowiedniej wersji poprzedniego zadania do pokazania liniowej niezależności zbioru funkcji: (a) $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$; (b) $\{\sin(nx) \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

24. Pokaż, że $\det((x_i + y_j)^{-1}) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)/\Pi_{i,j}(x_i + y_j)$. (Jest to tzw. wyznacznik Cauchy'ego.)

25. Po $\mathbf{Z}$ spaceruje losowo n policjantów; każdy ma własną monetę, co minutę nią rzuca, na orła robi krok długości 1 w prawo, a na reszkę krok długości 1 w lewo. Niech $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$ będą liczbami parzystymi; niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że policjant wychodzący z a_i po godzinie znajdzie się w b_j. Udowodnij, że prawdopodobieństwo tego, że n policjantów zaczynających spacer w $a_1, \ldots, a_n$ po godzinie znajdzie się w $b_1, \ldots, b_n$, przy czym po drodze żadni dwaj się nie spotkają, wynosi $\det(p_{ij})$.

26. Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$.