Algebra ISIM. Lista 4

Q jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni V. Ilekroć mowa o określoności zakładamy ponadto, że skalarami są liczby rzeczywiste. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym,* jeśli $Q(v) = 0$. Zakładamy, że $1 + 1 \neq 0$. Forma jest dodatnio/ujemnie półokreślona, jeśli jest nieujemna/niedodatnia na każdym wektorze.

1. Uzasadnij, że jeśli $B = (b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą V, a $Q: V \to K$ formą kwadratową, to ij-ty wyraz $m^{BB}(Q)$ jest równy $Q(b_i, b_j)$.
2. Znajdź $m^{BB}(Q)$: $Q((x, y, z)^\top) = x^2 + 5xy + 3yz + yx - 2z^2$, $B = ((1, 0, 1)^\top, (-1, -1, 1)^\top, (0, 1, 3)^\top)$.
3. Metodą Lagrange'a sprowadź do postaci diagonalnej formy $x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_ix_j$.
4. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone: $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$; $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;
5. Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.
6. Które z poniższych funkcji są formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych? Które są ponadto symetryczne? Napisz ich macierze w wybranych przez siebie bazach. Zbadaj dodatnią określoność (w przypadkach, gdy ma ona sens).

a) $\Phi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$: $\Phi(x, y) = x^\top y$, $\Phi(x, y) = y^\top x$.

b) $\Phi: M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, $\Phi(A, B) = \det(AB)$, $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB^\top)$, $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A + B)$.

c) $\Phi: \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: $\Phi(P_1, P_2) = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, $\Phi(P_1, P_2) = P_1(2)P_2(1)$.

7. Znajdź sygnaturę formy: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$; $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
8. Sprawdź, że funkcja $\det: M_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ jest formą kwadratową. Wyznacz sygnaturę tej formy.

---

9. (i) Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową. (ii) Ogólniej, uzasadnij, że jeśli $F : W \to V$ jest liniowe, zaś $Q : V \to K$ jest formą kwadratową, to $Q \circ F : W \to K$ jest formą kwadratową.
10. Symetryczne macierze 2×2 o wyrazach rzeczywistych tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Zidentyfikuj i naszkicuj podzbiór tej przestrzeni składający się z macierzy dodatnio określonych.
11. Udowodnij lub obal: (a) Jeśli macierz 3×3 ma wszystkie wyrazy dodatnie, to jest dodatnio określona; (b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona; (c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.
12. Czy jest prawdą, że symetryczna macierz A jest dodatnio półokreślona (tzn. $(\forall X)(X^\top AX \ge 0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne?
13. Podaj kryterium ujemnej określoności macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.
14. Podaj przykład formy kwadratowej Q na pewnej przestrzeni V oraz dwóch wektorów izotropowych $v, w \in V$, takich że $Q(v + w) \neq 0$.
15. Formy kwadratowe Q, Q' na rzeczywistej przestrzeni liniowej V nazywamy *liniowo równoważnymi,* jeśli istnieje odwracalne przekształcenie liniowe $F : V \to V$, takie że $Q' = Q \circ F$. Uzasadnij, że Q, Q' są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.
16. Mówimy, że forma kwadratowa Q jest *niezdegenerowana,* jeśli $\det(m^{BB}(Q)) \neq 0$. Uzasadnij, że pojęcie to jest dobrze zdefiniowane [nieznikanie wyznacznika nie zależy od wyboru bazy B]. Uzasadnij, że Q jest niezdegenerowana $\iff$ $(\forall v \in V \setminus \{0\})(\exists w \in V)(Q(v, w) \neq 0)$.

---

17. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni wymiaru n, zaś A macierzą Q w pewnej bazie. Załóżmy, że minory główne $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ są wszystkie niezerowe. Niech s oznacza liczbę zmian znaku w ciągu $1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Udowodnij, że sygnatura Q to $(n - s, s)$. [Wsk. zaadaptuj dowód kryterium Sylvestera.]
18. Załóżmy, że funkcja $Q : V \to K$ spełnia warunki: (a) $(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$ jest formą dwuliniową; (b) $(\forall v \in V)(Q(-v) = Q(v))$. Udowodnij, że Q jest formą kwadratową. Czy warunek (b) jest istotny?

19. Uzasadnij, że forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci $M^\top M$ dla pewnej macierzy M. Możliwie podobnym warunkiem scharakteryzuj macierze dodatnio określone.
20. Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) Q jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym v jest wektorem izotropowym, to $Q(v, w) = 0$.
21. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni $R_n[X]$. Czy zawsze istnieje $W \in \mathbf{R}_n[X]$, taki że dla każdego $P \in \mathbf{R}_n[X]$ zachodzi $Q(P) = \int_0^1 P(x)^2 W(x) dx$?
22. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p, q)?
23. Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz (a_{ij}): numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli i-ty i j-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego i. Znajdź wszystkie spójne grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz. (To zadanie jest częścią zadania o klasyfikacji półprostych grup Liego.)