Algebra ISIM. Lista 5

Wszystko dzieje się przestrzeni euklidesowej V, chyba że treść zadania mówi inaczej; $T : V \to V$ jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie samosprzężone T nazywamy *nieujemnie określonym,* jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle \geq 0)$ (a *dodatnio określonym,* jeśli dla niezerowych v nierówność jest ostra).

1. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zdiagonalizuj formy kwadratowe w bazie ortonormalnej. (Znajdź bazę ortonormalną w której forma jest diagonalna, i postać formy we współrzędnych związanych z tą bazą; wyjaśnij jak zamieniać te lepsze współrzędne na standardowe, i odwrotnie. Formy są określone na $\mathbf{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i podane w standardowych współrzędnych) (a) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$; (b) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$; (c) $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.
3. Czy zbiór $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1 = 1\}$ jest ograniczony?
4. Niech $C = (b_1, b_1 + b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V; niech $m_B^B(T) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdź $m_C^C(T^*)$.
5. Dla podzbioru przestrzeni euklidesowej $A \subseteq V$ określamy *dopełnienie ortogonalne* jako

$$A^\perp = \{v \in V : (\forall a \in A)(\langle v, a\rangle = 0)\}.$$

Uzasadnij, że: (a) $A^\perp < V$; (b) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$; (c) $A^\perp = (\mathrm{Lin}(A))^\perp$.

6. Udowodnij, że (a) $(T^*)^* = T$; (b) $(T + S)^* = T^* + S^*$; (c) $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.
7. Uzasadnij, że wielomian charakterystyczny podanej macierzy ma n różnych pierwiastków rzeczywistych, o ile $b_1 b_2 \dots b_{n-1} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

---

8. Udowodnij, że ortonormalny układ wektorów jest liniowo niezależny.
9. Udowodnij, że dowolny ortonormalny układ wektorów w przestrzeni V można powiększyć do ortonormalnej bazy tej przestrzeni.
10. Niech $u, v\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ będą funkcjami różniczkowalnymi, i niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Udowodnij, że

$$\frac{d}{dt}(\langle Au(t), v(t)\rangle) = \langle Au'(t), v(t)\rangle + \langle Au(t), v'(t)\rangle.$$

11. Niech $(b_1, \dots, b_k)$ będzie ortonormalną bazą podprzestrzeni W przestrzeni V. Określmy $P\colon V \to V$ wzorem

$$P(v) = \sum_{I=1}^{k} \langle v, b_i\rangle b_i.$$

Uzasadnij, że P jest rzutem prostopadłym na W, tj. że: (a) $P(w) = w$ dla $w \in W$; (b) $\ker(P) = W^\perp$. Uzasadnij też, że $P^* = P$.

12. Podaj przykład trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej V, samosprzężonego $T\colon V \to V$, oraz bazy V złożonej z parami nieprostopadłych wektorów własnych T.
13. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że wektory własne T odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.
14. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że T jest nieujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.

15. Udowodnij, że jeśli $T = T^*$, to $\sup\{|Tx| : x \in V, |x| \leq 1\} = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in V, |x| \leq 1\}$. (Lewą stronę tej równości nazywamy *normą* przekształcenia T i oznaczamy $\|T\|$.)

16. Udowodnij, że $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$, i że $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

---

17. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, to $W = (W^\perp)^\perp$. Uzasadnij, że jeśli $A \subseteq V$, to ($A < V \iff A = (A^\perp)^\perp$).

18. W przestrzeni funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) o okresie 2π z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\Delta(f) = -f''$. Uzasadnij, że Δ jest przekształceniem samosprzężonym i nieujemnie określonym. Znajdź możliwie dużo wektorów własnych Δ i sprawdź bezpośrednim rachunkiem ich ortogonalność.

19. Podaj przykład sytuacji (przestrzeni z iloczynem skalarnym i przekształcenia), w której wzór na całkowanie przez części daje się zinterpretować jako szczególny przykład wzoru $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$.

20. W przestrzeni $\mathbf{R}[t]$ wielomianów zmiennej t określmy iloczyn skalarny wzorem $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. *Wielomiany Legendre'a* określamy jako

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k].$$

Udowodnij, że proces Grama-Schmidta zastosowany do bazy $(1, t, t^2, \ldots)$ prowadzi (z dokładnością do skalowania) do układu wielomianów Legendre'a.

21. W przestrzeni z poprzedniego zadania wyznacz odległość punktu t^2 od płaszczyzny $\mathrm{Lin}(1, t)$.

22. (V euklidesowa, wymiaru n) Niech $Q(v) = \langle Tv, v\rangle$ będzie formą kwadratową na V, zaś $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$ niech będą wartościami własnymi samosprzężonego przekształcenia T.

a) Wykaż, że $r_i = \inf\{\sup\{\langle Tv, v\rangle : v \in U, |v| \leq 1\} : U < V, \dim(U) = i\} = \sup\{\inf\{\langle Tv, v\rangle : v \in U, |v| \leq 1\} : U < V, \dim(U) = n - i + 1\}$.

b) Załóżmy, że Q jest dodatnio określona. Niech $W < V$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n-1$; $Q|_W$ jest postaci $\langle Sw, w\rangle$ dla pewnego samosprzężonego $S : W \to W$; niech $r_1' \leq r_2' \leq \ldots \leq r_{n-1}'$ będą wartościami własnymi S. Wykaż, że $r_1 \leq r_1' \leq r_2 \leq r_2' \leq r_3 \leq \ldots \leq r_{n-1}' \leq r_n$.

c) Elipsoidę w $\mathbf{R}^3$ przekrojono płaszczyzną przechodzącą przez jej środek symetrii; przekrój jest elipsą. Jak mają się długości półosi tej elipsy do długości półosi elipsoidy?

23. Dla symetrycznej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ niech $\lambda_i(A)$ oznacza i-tą co do wielkości wartość własną (na przykład $\lambda_1(A) = \inf \sigma(A)$, $\lambda_n(A) = \sup \sigma(A)$). Udowodnij, że λ_i jest ciągłą funkcją na przestrzeni macierzy symetrycznych $n \times n$.

24. Przeprowadź dowód tw. spektralnego maksymalizując na sferze funkcję $|Av|^2$ (zamiast użytej na wykładzie funkcji $\langle Av, v\rangle$).