Algebra ISIM. Lista 6

Na tej liście "układ" zwykle oznacza "układ równań liniowych".

1. Znajdź postać kanoniczną równania podanej krzywej/powierzchni. Odczytaj z niej możliwie dużo własności geometrycznych (typu: długości półosi, kąt między asymptotami, odległość powłok itp.). Wyznacz macierze przejścia między współrzędnymi standardowymi a współrzędnymi, w których równanie ma postać kanoniczną. Spróbuj naszkicować.

a) $x^2 + 4xy + y^2 = -7$
b) $x^2 + \sqrt{3}xy = 3$
c) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 3$
d) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 12xz - 24yz + 18z^2 = 1$
e) $11x^2 + 4xy - 16xz + 2y^2 + 20yz + 5z^2 = 9$

2. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

3. Wyznacz układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Dla jakich prawych stron układy z poprzedniego zadania pozostają niesprzeczne?

5. Znajdź wielomian $P(X)$ stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych, taki że $P(-2) = 1$, $P(-1) = 3$, $P(1) = 13$ i $P(2) = 33$.

6. Opisz układem równań przestrzeń $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}\}$.

7. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla którego wektory $(1, 4, -2, 2, -1)^\top$, $(1, 13, -1, 2, 9)^\top$, $(2, 7, -8, 4, -5)^\top$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.

8. Niech $B \in M_{(k+1)\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\mathrm{Im}(F_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\mathrm{Im}(F_A)$?

9. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A.

10. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy głównej jest mniejszy niż jej liczba kolumn.

11. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy głównej układu jest równy liczbie jej wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.

12. Udowodnij, że jeśli układ jednorodny ma więcej niewiadomych niż równań, to ma niezerowe rozwiązanie. Udowodnij, że jeśli układ ma więcej równań niż niewiadomych, to można zmienić jego prawe strony tak, by stał się sprzeczny.

---

13. W zależności od wartości liczb a, b stwierdź, czym jest zbiór rozwiązań równania $ax^2 + by^2 = 0$.

14. W zależności od wartości liczb a, b, c stwierdź, czym jest zbiór rozwiązań równania $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$.

15. Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący zbiór $v+W$. Opisz zbiór $\{(1, 0, -1, 1)^\top + t(1, 2, 1, -2)^\top + s(-1, 3, 4, 0)^\top + u(-1, 8, 9, -2)^\top : t, s, u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.

16. Udowodnij, że: (a) $r(AB) \le r(A)$; (b) $r(AB) \le r(B)$; (c) jeśli A jest odwracalna, to $r(AB) = r(B)$; (c) jeśli B jest odwracalna, to $r(AB) = r(A)$.

17. Uzasadnij, że $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

18. Niech $W < K^n$, $W = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$, $\dim W = s$. Udowodnij, że W można opisać układem $n - s$ równań.

---

19. Niech wierszami macierzy B będą wektory fundamentalnego układu rozwiązań układu $A^\top X = 0$. Udowodnij, że $\ker F_B = \mathrm{Im}\, F_A$.
20. Udowodnij, że dla każdej macierzy $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ istnieje $\epsilon > 0$, taki że jeśli $\|A - B\|_{HS} \leq \epsilon$, to $r(B) \geq r(A)$. (Przypomnienie: $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} |A_j^i|^2$. Tezę zadania wyraża się krótko mówiąc, że rząd macierzy jest funkcją *półciągłą*. Dowiedz się, czy chodzi o półciągłość *z góry* czy *z dołu*, i spróbuj zrozumieć dlaczego.)
21. Niech $X_1, \ldots, X_9, Y \in \mathbf{Q}^{58}$. Załóżmy, że istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_9 \in \mathbf{R}$, takie że $\sum_{i=1}^9 \alpha_i X_i = Y$. Udowodnij, że istnieją $\beta_1, \ldots, \beta_9 \in \mathbf{Q}$, takie że $\sum_{i=1}^9 \beta_i X_i = Y$.
22. Niech $Q, Q' \colon V \to \mathbf{R}$ będą formami kwadratowymi na skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej V. Załóżmy też, że Q jest dodatnio określona. Udowodnij, że istnieje baza V w której obie formy Q, Q' są diagonalne.
23. Podaj przykład dwóch form kwadratowych na $\mathbf{R}^2$, które nie diagonalizują się we wspólnej bazie.
24. Czy zbiorem wartości minorów 2×2 rzeczywistej macierzy 2×4 może być zbiór: (a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; (b) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
25. Rozstrzygnij na jakich powierzchniach w $\mathbf{R}^3$ zadanych równaniami stopnia 2 mogą leżeć proste.