Równania różniczkowe

1. Znajdź funkcję $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taką że $f'' = f' + 2f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$.
2. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. (a) Oblicz A^2, A^3, A^4, A^n. (b) Oblicz $\exp(A)$ oraz $\exp(tA)$.
3. Znajdź macierz $P \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, taką że $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
4. Znajdź funkcję $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taką że $f'' = 2f' - f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

Google

Niech N będzie liczba stron www. Niech ℓ_j oznacza liczbę stron, do których są linki na stronie j. Niech $H^i_j = 1/\ell_j$ jeśli na stronie j jest link do strony i, $H^i_j = 0$ w przeciwnym przypadku. "Page rank" określamy (wstępnie) jako wektor I spełniający równość $I = HI$. (page rank strony j to współrzędna I^j tego wektora.) Macierz H opisuje losowe poruszanie się użytkownika sieci po jej stronach: H^i_j to prawdopodobieństwo przejścia ze strony j na stronę i.

5. Rozważmy sieć, w której na stronie j jest jeden link – do strony $j + 1$ (dla $j = 1, 2, \ldots, N - 1$; na stronie N nie ma żadnych linków). Napisz macierz H i sprawdź, że jedynym rozwiązaniem równania $HI = I$ jest wektor $I = 0$.

   Aby nieco poprawić sytuację modyfikujemy macierz H. Jeśli $\ell_j = 0$, to kładziemy $P^i_j = 1/N$ dla wszystkich i; w przeciwnym razie $P^i_j = H^i_j$. Interpretacja w terminach ruchu losowego: użytkownik, który znalazł się na stronie bez linków, wybiera następną stronę losowo spośród wszystkich stron www (dokonuje *teleportacji*).
6. Napisz macierz P i rozwiąż równanie $I = PI$ dla sieci z poprzedniego zadania.

   Macierz P jest *macierzą Markowa* : ma nieujemne wyrazy, które w każdej kolumnie sumują się do 1.
7. Udowodnij, że liczba 1 jest wartością własną dowolnej macierzy Markowa.
8. Podaj przykład sieci, dla której równanie $PI = I$ ma dwa liniowo niezależne rozwiązania.
9. Załóżmy, że $PI = I$, oraz że wszystkie współrzędne I są nieujemne. Uzasadnij, że jeśli ze strony j da się dojść do strony i (być może w wielu krokach, z których niektóre mogą być teleportacjami), ale nie da się wrócić, to $I^j = 0$. Wsk. rozbij sieć na dwie części, tak by z jednej można było przejść do drugiej, a odwrotnie nie.

   Jak widać z poprzedniego zadania, wektor I może mieć wiele współrzędnych zerowych. Aby uniknąć tego problemu zastępujemy macierz P macierzą $Q = rP + (1 - r)T$, gdzie T jest *macierzą teleportacji* ($T^i_j = 1/N$ dla wszystkich i, j), zaś $r \in (0, 1)$ stosownie dobraną liczbą (np. $r = 0.85$). Intepretacja w terminach ruchu losowego: z prawdopodobieństwem $1 - r = 0.15$ użytkownik jest *znudzony* i zamiast klikać na kolejny link dokonuje teleportacji.

   Macierz Q jest macierzą Markowa o dodatnich wyrazach. Można pokazać, że macierz Markowa M o dodatnich wyrazach:
   - ma jedyny (z dokładnością do skalowania) wektor własny I odpowiedający wartości własnej 1;
   - że współrzędne tego wektora są dodatnie;
   - że inne wartości własne M są co do modułu mniejsze od 1;
   - że dla dowolnego wektora w ciąg $(M^n w)_n$ zbiega do pewnej krotności I.

   Tej ostatniej własności używa się do praktycznego wyliczania wektora I.
10. Spróbuj pokazać choć część wymienionych własności macierzy Markowa o dodatnich wyrazach.

Rodziny podzbiorów

11. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów skończonego zbioru X. Załóżmy, że każdy zbiór z tej rodziny ma parzyście wiele elementów, a przekrój każdych dwóch ma nieparzyście wiele elementów. Pokaż, że $\#\mathcal{F} \leq \#X$.
12. Z nierówności Fishera wywnioskuj, że n punktów na płaszczyźnie nieleżących na jednej prostej wyznacza co najmniej n prostych.
13. Zbiór krawędzi grafu K_n (pełnego grafu na n wierzchołkach) przedstawiono w postaci rozłącznej sumy k zbiorów, z których każdy jest pełnym grafem dwudzielnym (jest postaci $K_{a,b}$; dla różnych składników liczby a, b mogą być różne). Pokaż, że $k \geq n - 1$. Niech wierzchołkami K_n będą liczby $1, 2, \ldots, n$.

a) Niech ℓ-ty ze składników składa się z wszystkich krawędzi łączących wierzchołki pewnego zbioru X_ℓ z wierzchołkami pewnego zbioru Y_ℓ. Macierz A_ℓ określamy tak: $(A_\ell)^i_j = 1$, jeśli $i \in X_\ell$, $j \in Y_\ell$; $(A_\ell)^i_j = 0$ w przeciwnym wypadku. Uzasadnij, że rząd A_ℓ jest równy 1.

a) Niech $A = \sum_{\ell=1}^k A_\ell$. Uzasadnij, że $A + A^\top = J - I$, gdzie J jest macierzą samych jedynek.

c) Załóżmy nie wprost, że $r(A) \leq n - 2$. Uzasadnij, że wtedy istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbf{R}^n$, taki że $Av = 0$ i $Jv = 0$. Wywnioskuj stąd, że $0 = \langle (A + A^\top)v, v\rangle = \langle (J - I)v, v\rangle < 0$.

14. Załóżmy, że w pewnym skończonym grafie każde dwa wierzchołki mają dokładnie jednego wspólnego sąsiada. Udowodnij, że istnieje wierzchołek sąsiadujący ze wszystkimi pozostałymi. Załóż nie wprost, że G jest grafem–kontrprzykładem.

a) (kombinatoryka) Pokaż, że każde dwa wierzchołki G mają ten sam stopień (powiedzmy: k).

b) (algebra liniowa) Pokaż, że $A^2 = (k-1)I + J$, gdzie A jest macierzą incydencji grafu G, zaś J macierzą samych jedynek. Zbadaj wartości własne A.

Kod Hamminga

Ustalmy $\ell \geq 2$. Niech $P = (A|I)$ będzie macierzą, której kolumnami są wszystkie niezerowe wektory $\mathbf{F}_2^\ell$, i niech $G = \left(\frac{I}{A}\right)$. Kod Hamminga to podprzestrzeń C w $\mathbf{F}_2^{2^\ell - 1}$ generowana przez kolumny G/ zadana układem $PX = 0$.

15. Sprawdź równoważność tych definicji.

16. Uzasadnij, że dla dwóch różnych $v, w \in C$ zachodzi $d_H(v, w) \geq 3$ (wektory v, w różnią się co najmniej trzema współrzędnymi).

17. Udowodnij, że jeśli podzbiór $C' \subseteq \mathbf{F}_2^{2^\ell - 1}$ też spełnia warunek z poprzedniego zadania, to C' ma nie wiecej elementów niż kod Hamminga.

Luka spektralna

18. Oblicz λ_1 następujących grafów:

a) grafu pełnego K_n;

b) pełnego grafu dwudzielnego $K_{m,n}$;

c) n-cyklu C_n;

19. Opisz spektrum i diagonalizację Δ dla 1-szkieletu n-wymiarowej kostki. (Niech wierzchołkami kostki będą elementy $\{-1, 1\}^n$. Dla $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ rozważ funkcję $f_S(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i \in S} x_i$. Uzasadnij, że jest to funkcja własna Δ.)

20. Niech G_p będzie grafem incydencji płaszczyzny rzutowej nad ciałem p-elementowym, tzn.: wierzchołki G_p to 1- i 2-wymiarowe podprzestrzenie liniowe w $\mathbf{F}_p^3$; krawędzie odpowiadają właściwym zawieraniom. Wyznacz $\lambda_1(G_p)$.
