

Algebra ISIM. Lista 7C

1. Przedstaw w postaci $a + bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.
 2. Zapisz w postaci trygonometrycznej: -1 , $1 + i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $7 - 7i$, $-5 + 5\sqrt{3}i$.
 3. Oblicz $\overline{(2 + 3i)(7 - i)}$.
 4. Rozwiąż układy równań (a) $\begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 1 + i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (1 + i)z - iw = 3 + i \\ (2 + i)z + (2 - i)w = 2i \end{cases}$
-
5. Rozwiąż (w **C**):
 (a) $z^2 - z + 1 = 0$, (b) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$, (c) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$, (d) $z^2 + iz = 2$,
 (e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$.
 6. Udowodnij: (a) $|-z| = |z|$, (b) $|z/w| = |z|/|w|$, (c) $|z/|z|| = 1$, (d) $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$,
 (e) $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$, (f) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$, (g) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, (h) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
 7. Średnia arytmetyczna pewnych 150 liczb zespolonych wynosi 1. Udowodnij, że przynajmniej jedna z tych liczb ma moduł nie mniejszy niż 1.
 8. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
 (a) $(1 + i)(\sqrt{3} + i)$, (b) $(4 + 4i)(-3 + 3i)$, (c) $(10 - 10\sqrt{3}i)(2 - 2i)$, (d) $(\sqrt{3} + i)^{30}$.
 9. Oblicz (a) $(1 + i)^{1000}$; (b) $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^{24}$; (c) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{129}$.
 10. Wyraż $\sin(5\phi)$ przez $\sin \phi$ i $\cos \phi$. [Wsk. Użyj wzoru de Moivre'a.]
 11. Wyprowadź wzór na postać trygonometryczną ilorazu dwóch liczb zespolonych (o zadanych postaciach trygonometrycznych). Użyj go do obliczenia ilorazów:
 (a) $(2 + 2i)/(1 - i)$, (b) $(1 - \sqrt{3}i)/(\sqrt{3} + i)$, (c) $3i/(1 + i)$.
 12. Narysuj zbiór $\{\frac{1+it}{1-it} : t \in \mathbf{R}\}$.
 13. Posługując się postacią trygonometryczną oblicz i narysuj podane pierwiastki:
 (a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27 ; (c) 4 stopnia z $-(1/2) - (\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1 .
 14. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiór zadany równaniem / nierównością:
 (a) $\frac{|z+1|}{|z-i|} = 1$; (b) $\frac{|z+1|}{|z-i|} = 2$; (c) $|\arg z| < \pi/3$; (d) $3 < |z - 2 + i| < 5$; (e) $-1 < \text{Re}(iz) < 0$.
 15. Udowodnij, że $|\frac{z-i}{z+i}| < 1 \iff \text{Im}(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.
-
16. Liczbę zespoloną nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1*, jeśli każdy pierwiastek stopnia n z 1 jest jej potęgą. Które spośród pierwiastków z 1 stopnia: (a) 3; (b) 12; (c) 16; są pierwiastkami pierwotnymi tegoż stopnia z 1?
 17. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.
 18. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z \mapsto iz$.
 19. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w .
 20. Zinterpretuj geometrycznie wyrażenie $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)$. (Zakładamy $z_1 \neq z_3 \neq z_2$.)

21. Zapisz w postaci wykładniczej: $-1, 1 + i, -1 - \sqrt{3}i, 7 - 7i, -5 + 5\sqrt{3}i$.
22. Zapisz w postaci wykładniczej wskazane pierwiastki: (a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27 ; (c) 4 stopnia z $-(1/2) - (\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1 .
23. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad \mathbf{C} , a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad \mathbf{R} . Wykorzystaj fakt, że liczba a jest pierwiastkiem P .
- (a) $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6, a = -2$;
 (b) $P(z) = z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26, a = -2 + 3i$;
 (c) $P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2, a = i$;
 (d) $P(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 10z^2 + 25z, a = 1 - 2i$.
24. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby $1, 3, 2 + i$ są jego pierwiastkami.
-
25. Na bokach czworokąta wypukłego zbudowano (na zewnątrz tego czworokąta) kwadraty o środkach A, B, C, D . Udowodnij, że odcinki AC i BD są prostopadłe i mają tę samą długość.
26. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad \mathbf{C} , a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad \mathbf{R} .
- (a) $P(z) = z^6 + 27$;
 (b) $P(z) = z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 4z - 5$;
 (c) $P(z) = z^4 + 4$.
27. Rozwiąż równania: (a) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$; (b) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.
28. Uzasadnij wzór $x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n} - 1$.
29. Uzasadnij (dla $z \neq 1$) wzór $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dla $z = e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).
30. Oblicz $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$. Wywnioskuj następujący wzór Strassnitzky'ego:
- $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$
-
31. Udowodnij, że $\prod_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = \pm 2^{-n}$; oraz że $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.
32. Wyznacz wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość $W(x^2)W(x^3) = (W(x))^5$.
33. Oblicz $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -7 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{1232} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość rachunków.
34. Niech $P(z) \in \mathbf{C}[z]$ będzie wielomianem. Udowodnij, że funkcja $\mathbf{C} \ni z \mapsto |P(z)| \in \mathbf{R}$ jest ciągła.
35. Przeczytaj prolog książki W.Rudina *Analiza rzeczywista i zespolona*.