Algebra ISIM. Lista 8

1. Czy $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni

a) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,3)^\top\}), \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}, \{(t,0,0)^\top : t \in \mathbf{R}\}$?

b) $\{(x,y,z)^\top : x+y+z=0\}, \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}\}$?

c) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,1)^\top, (-2,1,3)^\top\}), \mathrm{Lin}(\{(1,6,7)^\top\})$? d) $\{(x,y,z)^\top : x+2y-z=0\}, \mathrm{Lin}(\{(1,2,-1)^\top\})$?

2. Udowodnij, że (a) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = A\} \oplus \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = -A\}$; (b) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\} \oplus \{tI : t \in \mathbf{R}\}$.

3. Czy jest prawdą, że (w punkcie b przyjmujemy $\epsilon = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$)

a) $\mathbf{R}_{12}[X] = \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \le 6\} \oplus \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \ge 7\}$?

b) $\mathbf{C}[X] = \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon^2 P(X)\}$?

4. Pewne trzy proste w $\mathbf{R}^3$ przechodzące przez 0 mają tę własność, że kąt między każdymi dwoma z nich jest $> 60°$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą tych trzech prostych?

5. Niech $V = V_1 \oplus V_2$.

a) Pokaż, że jeśli $F_i : V_i \to W$ są liniowe, to istnieje jedyne liniowe $F : V \to W$, takie że $F|_{V_i} = F_i$. $(i = 1, 2)$

b) Załóżmy, że $F, G : V \to W$ są liniowe. Udowodnij, że jeśli $F|_{V_1} = G|_{V_1}$, $F|_{V_2} = G|_{V_2}$, to $F = G$.

6. Niech $F : V \to W$.

a) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $\mathrm{Im}(F) = F[V_1] \oplus F[V_2]$?

b) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?

c) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ i $F|_{V_1}$, $F|_{V_2}$ są $1-1$, to F jest $1-1$?

d) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$ i $W_1, W_2 \subseteq \mathrm{Im}(F)$, to F jest na?

7. Niech $W = W_1 \oplus W_2$. Czy jest prawdą, że $\mathrm{Hom}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V,W_2)$?

8. Znajdź (jakąś) podprzestrzeń dopełniczą do $W < V$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathrm{Lin}(\{(1,2,0)^\top, (0,1,1)^\top\})$; (b) $V = \mathbf{R}_4[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P'(1) + 2P(0) = 0\}$; (c) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 P(x)dx = 0\}$; (d) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)e^{-x^2}dx = 0\}$;

9. Podaj przykład podprzestrzeni $U, V, W < \mathbf{R}^4$, takich że $\mathbf{R}^4 = U \oplus V = V \oplus W = W \oplus U$.

10. Zbadaj diagonalizowalność macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

11. Uzasadnij, że dla każdej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V istnieje *podprzestrzeń dopełnicza*: podprzestrzeń $W' < V$, taka że $V = W \oplus W'$.

12. Uzasadnij równoważność warunków definiujących liniową niezależność układu podprzestrzeni:

a) $(\forall v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n)(v_1 + \ldots + v_n = 0 \Rightarrow v_1 = \ldots = v_n = 0)$;

b) $(\forall i)(V_i \cap \sum_{j \ne i} V_j = \{0\})$.

13. Załóżmy, że $\dim V < \infty$, $V_1, \ldots, V_n < V$. Uzasadnij równoważność warunków:

a) $V = \oplus_i V_i$;

b) $V_1, \ldots, V_n$ generują V oraz $\sum_i \dim V_i \le \dim V$.

14. Niech $V_1, V_2 < V$, $\dim(V) < \infty$. Uzasadnij równoważność warunków:

a) $V = V_1 \oplus V_2$;

b) $V_1 \cap V_2 = 0$ i $V_1 + V_2 = V$;

c) $V_1 \cap V_2 = 0$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$;

d) $V_1 + V_2 = V$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$.

15. Niech $V_1, V_2, V_3 < V$. Załóżmy, że $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) = \dim(V)$, $V_2 \cap V_3 = \{0\}$, $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$. Udowodnij, że $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Uogólnij na większą liczbę podprzestrzeni.

16. Załóżmy, że u, v i $u + v$ są wektorami własnymi F. Udowodnij, że $u + 2v$ też jest wektorem własnym F.

17. Udowodnij, że w przestrzeni euklidesowej/unitarnej $V = W \oplus W^\perp$.

18. Przypomnij sobie definicję i własności rzutu prostopadłego na podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej (Lista 5, zadanie 11); przekonaj się, że działają one również w przypadku unitarnym. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej/unitarnej V. Udowodnij, że $|v - P_W(v)| = \min\{|v - w| : w \in W\}$.
19. Niech F będzie samosprzężonym endomorfizmem przestrzeni euklidesowej/unitarnej V. Niech P_λ będzie rzutem prostopadłym na przestrzeń własną V_λ. Uzasadnij, że

$$F = \sum_{\lambda \in \sigma(F)} \lambda P_\lambda.$$

20. Niech V, W będą przestrzeniami unitarnymi, $F\colon V \to W$ niech będzie liniowe. Udowodnij, że
a) istnieje jedyne liniowe $F^*\colon W \to V$ spełniające

$$(\forall v \in V)(\forall w \in W)(\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle);$$

b) jeśli B, C są ortonormalnymi bazami V, W, to $m_B^C(F^*) = m_C^B(F)^*$.

---

21. Niech F będzie skończonym zbiorem. Załóżmy, że każdemu jego podzbiorowi A jest przypisana podprzestrzeń V_A pewnej przestrzeni liniowej V, przy czym jeśli $A \subseteq B$, to $V_A \subseteq V_B$. Załóżmy wreszcie, że $V_F = V$. Niech V^A będzie podprzestrzenią V_A dopełniczą do $\sum_{B \subset A} V_B$. Czy jest prawdą, że $V = \oplus_{A \subseteq F} V^A$?
22. Udowodnij, że rodzinę diagonalizowalnych endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej można zdiagonalizować we wspólnej bazie wtedy i tylko wtedy, gdy endomorfizmy tej rodziny są parami przemienne.
23. Niech P, Q będą rzutami prostopadłymi na pewne dwie podprzestrzenie przestrzeni euklidesowej/unitarnej V. Udowodnij, że istnieje rozkład V na sumę prostą 1- i 2-wymiarowych podprzestrzeni V_i, z których każda jest P- i Q-niezmiennicza (tzn. $P(V_i) \subseteq V_i$, $Q(V_i) \subseteq V_i$).
24. Niech $E, F, H \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Załóżmy, że $HE - EH = 2E$, $HF - FH = -2F$, $EF - FE = H$. Udowodnij, że wartości własne macierzy H są liczbami całkowitymi. (Prawdą jest też, że H jest diagonalizowalna, ale tego na razie nie dasz rady udowodnić. Przykład: $E = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $F = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $H = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$. To zadanie jest częścią zadania o klasyfikacji reprezentacji półprostych algebr Liego.)
25. Udowodnij, że każda kwadratowa macierz zespolona jest granicą ciągu macierzy diagonalizowalnych.
26. Udowodnij, że dla dowolnej kwadratowej macierzy zespolonej zachodzi wzór $\det \exp(A) = e^{\operatorname{tr} A}$.
27. Niech A będzie macierzą $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych oraz $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Pokaż, że $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$. Jest to tzw. tw. Cayleya–Hamiltona, na razie nad **R**.
28. *Wywnioskuj* z tw. Cayleya–Hamiltona nad **R** twierdzenie Cayleya–Hamiltona nad dowolnym ciałem.