Algebra ISIM. Lista 9

Wszystko dzieje się w (skończenie wymiarowej) przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Uzasadnij, że jeśli $U : V \to V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprzężone.
2. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:
$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;
3. Wyznacz ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz w tej bazie przekształcenia unitarnego, zadanego w standardowej bazie $\mathbf{C}^3$ macierzą $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$.
4. Uzupełnij układ $(1, -1, i, 0)^\top, (-1, 0, i, -i)^\top$ do ortogonalnej bazy $\mathbf{C}^4$.
5. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma rzeczywistą wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.
6. Które przekształcenia ortogonalne są samosprzężone?
7. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1.
8. Znajdź odległość punktu $(1, 2, 3, 4)^\top$ od płaszczyzny $\mathrm{Lin}(\{(1, -1, 1, -1)^\top, (0, 1, 2, -1)^\top\})$.
9. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami E_1, E_2, E_3, wynoszą $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$?
10. Znajdź rozkłady biegunowe przekształceń $\mathbf{R}^n$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

11. Niech $v_1, \ldots, v_k$, $w_1, \ldots, w_k$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, warunek $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne U, takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
12. Uzasadnij, że jeśli $|v| = |w|$, to istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne F, takie że $F(v) = w$.
13. Uzasadnij, że jeśli T jest samosprzężone, to $\exp(iT)$ jest unitarne. Uzasadnij, że każde przekształcenie unitarne jest postaci $\exp(iT)$ dla pewnego samosprzężonego T.
14. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą ortogonalną, $\lambda = a + bi \in \mathbf{C}$ jej nierzeczywistą wartością własną, zaś $v = u + iw \in \mathbf{C}^n$ jej zespolonym wektorem własnym ($a, b \in \mathbf{R}$, $u, w \in \mathbf{R}^n$).
   a) Zauważ, że $\overline{v}$ jest wektorem własnym A dla wartości własnej $\overline{\lambda}$.
   b) Uzasadnij, że (zespolone) wektory własne A odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe (względem standardowego iloczynu skalarnego na $\mathbf{C}^n$).
   c) Wywnioskuj, że $\langle v, \overline{v} \rangle = 0$, że $u \perp w$, i że $|u| = |w|$.
15. Udowodnij, że w bazie standardowej macierz dowolnej liniowej izometrii $\mathbf{R}^2$ jest postaci
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}.$$
16. Zdiagonalizuj nad $\mathbf{C}$ macierze z poprzedniego zadania.
17. Udowodnij, że złożenie dwóch (liniowych) symetrii obrotowych $\mathbf{R}^3$ jest obrotem.
18. Udowodnij, że każda izometria $\mathbf{R}^2$ jest obrotem lub symetrią z poślizgiem (zlożeniem odbicia w pewnej prostej i translacji wzdłuż tej prostej).
19. Zdefiniuj uogólnioną symetrię z poślizgiem w przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Następnie udowodnij, że każda izometria $\mathbf{R}^n$ ma punkt stały lub jest uogólnioną symetrią z poślizgiem.
20. Udowodnij, że macierz Grama układu wektorów jest zawsze nieujemnie określona.
21. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \le \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$.

22. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l) \le V(a_1,\ldots,a_k)V(b_1,\ldots,b_l)$.

---

23. Endomorfizm przestrzeni unitarnej V nazywamy *normalnym,* jeśli $TT^* = T^*T$. Udowodnij, że endomorfizm V jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy diagonalizuje się w bazie ortonormalnej.
24. Niech T będzie rzutem (tzn. niech spełnia $T^2 = T$ – wyjaśnij skąd nazwa). Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: (a) $T = T^*$; (b) $TT^* = T^*T$; (c) $\mathrm{Im}(T) = (\ker(T))^\perp$.
25. (V unitarna) Udowodnij, że jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle = 0)$, to $T = 0$. Czy jest to prawdą również w przypadku rzeczywistym?
26. Udowodnij, że każdy endomorfizm przestrzeni unitarnej jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.
27. Udowodnij, że jeśli $U\colon V \to V$ jest unitarne, to dla dowolnego $v \in V$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k v = Pv$, gdzie P jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\{w \in V : Uw = w\}$.
28. Załóżmy, że T jest samosprzężony, a S spełnia warunek: $(\forall P \in \mathrm{Hom}(V,V))(TP = PT \Rightarrow SP = PS)$. Udowodnij, że istnieje wielomian w taki że $w(T) = S$.
29. Czy istnieją punkty a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 w $\mathbf{R}^n$ (dla pewnego n), takie że macierzą odległości $(d(a_i, a_j))$ jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ 3 & 0 & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{17} & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to znajdź najmniejsze możliwe n.
30. Upewnij się, że teoria form kwadratowych przenosi się na przypadek form hermitowskich. (Forma hermitowska na V to półtoraliniowe $\Phi\colon V \times V \to \mathbf{C}$ spełniające $\Phi(v,w) = \overline{\Phi(w,v)}$.)