Algebra ISIM. Odds and Ends

1. Używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie, że $5(u+w)+2w=7(u+w)+(-2)u$.
2. Wykaż, że w dowolnym ciele zachodzą tożsamości: $-(-x)=x$, $(-1)(-1)=1$, $(-x)y=-xy$, $(x-y)z=xz-yz$, $\frac{x-y}{z}=\frac{x}{z}-\frac{y}{z}$ (dla $z\neq 0$), $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$ (dla $x,y\neq 0$), $\frac{z}{x}+\frac{t}{y}=\frac{zy+tx}{xy}$ (dla $x,y\neq 0$), $x-(y-z)=(x-y)-z$.
3. Podaj przykład trójki $V_1, V_2 < W$, takiej że ani $V_1\cup V_2$, ani $V_1\backslash V_2$ nie jest podprzestrzenią W.
4. Uzasadnij lub obal (A,B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\mathrm{Lin}(A\cup B)=\mathrm{Lin}(A)+\mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(A\cap B)=\mathrm{Lin}(A)\cap\mathrm{Lin}(B)$, $A\subseteq B\Rightarrow \mathrm{Lin}(A)\subseteq\mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(A))=\mathrm{Lin}(A)$.
5. Niech C oznacza przestrzeń liniową wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Sprawdź czy jest podprzestrzenią liniową C zbiór wszystkich ciągów (a_n) takich że
   a) $\lim a_n = 0$?
   b) $\lim a_n = 1$?
   c) (a_n) jest niemalejący?
   d) $2a_7+\lim a_n=0$?
   e) $a_0+\lim a_n+1=0$?
   f) (a_n) jest zbieżny?
   g) (a_n) jest ograniczony?
   h) $a_1+a_{100}=0$?
   i) $a_{100}+2=0$?
   j) $a_{100}^2+a_0=0$?
   k) $a_{100}^2=0$?
   l) $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$?
   (lim oznacza granicę przy $n\to+\infty$)
6. Wyznacz bazę i wymiar $\mathrm{Lin}(A)$ dla: a) $A=\{(1,0,0,-1)^\top,(2,1,1,0)^\top,(1,1,1,1)^\top,(1,2,3,4)^\top,(0,1,2,3)^\top\}$; b) $A=\{(1,1,1,1,0)^\top,(1,1,-1,-1,-1)^\top,(2,2,0,0,-1)^\top,(1,1,5,5,2)^\top,(1,-1,-1,0,0)^\top\}$.
7. Wskaż bazę $\mathbf{R}_3[X]$ do której należą wielomiany $1+X^2, 1+2X+X^3$.
8. Załóżmy, że $\phi: V\to W$ jest izomorfizmem liniowym. Pokaż, że
   a) U jest k-wymiarową podprzestrzenią $V \iff \phi[U]$ jest k-wymiarową podprzestrzenią W.
   b) $v_1,\dots,v_k$ są lnz $\iff \phi(v_1),\dots,\phi(v_k)$ są lnz.
   c) $\mathrm{Lin}(v_1,\dots,v_k)=U \iff \mathrm{Lin}(\phi(v_1),\dots,\phi(v_k))=\phi[U]$.
   d) zachodzą inne podobne własnosci – aż Ci się znudzi.
9. Wyznacz (pewną) bazę i wymiar następujących podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$:
   a) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\})$
   b) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\})$
   c) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\})$
   d) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\})$
   e) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}\})$
   f) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\n\\0\end{pmatrix}: n\in\mathbf{N}\})$
   g) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\})\cap\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\})$
   h) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\})+\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\})$
   i) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\})+\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\})+\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\})$
   j) $\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\})\cap\mathrm{Lin}(\{\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\})$
10. Flagą w przestrzeni liniowej V nazywamy ciąg $(V_0,V_1,\dots,V_k)$ podprzestrzeni V, taki że $V_i<V_{i+1}$, $V_i\neq V_{i+1}$. Udowodnij, że wymiar V jest o 1 mniejszy od maksymalnej możliwej długości flagi w V. (Zakładamy, że wymiar V jest skończony.)
11. Znajdź wymiar przestrzeni $\{P\in\mathbf{R}_3[X]: P(1)=P(-1)=2P(0)+P''(0)=0\}$.
12. Podaj przykład 4-elementowego podzbioru $\mathbf{R}^3$, w którym zawarte są jedynie 3 bazy $\mathbf{R}^3$.
13. Załóżmy, że $W<V$, $\dim W=5$, $\dim V=7$. Jaka jest maksymalna możliwa liczba elementów liniowo niezależnego podzbioru $V\backslash W$? (Jeśli masz kłopoty, spróbuj najpierw dla mniejszych wymiarów.)
14. Czy jest prawdą, że w dowolnej przestrzeni liniowej, dla dowolnych jej podprzestrzeni liniowych U, V, W zachodzi $U\cap(V+W)=U\cap V+U\cap W$?

15. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar Im(F)? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^{100}$?

16. Niech dla $i = 0, \ldots, n$ funkcja $f_i : V_i \to V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im(f_i)}$ (dla $i = 0, \ldots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(V_i) = 0$.

17. Niech $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ będzie zadane przez $m_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $B = (1, X, X^2)$. Oblicz $m_C(F)$ dla $C = (3X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 2, 2X^2 + X + 3)$.

18. Niech $B = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $m_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, gdzie $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Oblicz $m_C(F)$.

19. Oblicz $m_B(D)$, gdzie $D : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ dane jest wzorem $D(P) = P'$, zaś B jest bazą (a) $(1, X, \ldots, X^n)$; (b) $(X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1)$; (c) $(1, X-1, \frac{1}{2}(X-1)^2, \ldots, \frac{1}{n!}(X-1)^n)$.

20. Niech $B = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$, $m_C^B(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znajdź C.

21. Niech $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P''(1) + 3P(0) = 0\}$, zaś $F : V \to \mathbf{R}^3$ niech będzie dane wzorem $F(P) = (P(-1), P(0), P(1))^\top$. Znajdź $F^{-1}((0,1,0)^\top)$.

22. Niech B, B' będą bazami V; C, C' – bazami W, zaś $F : V \to W$. Uzasadnij, że rząd$(m_C^B(F))$ =rząd$(m_{C'}^{B'}(F))$.