Rozmaitości, lista $\frac{3}{2}$

Odwzorowanie jest gładkie, jeśli jest nieskończenie wiele razy różniczkowalne (ma pochodne cząstkowe wszystkich rzędów).

Odwzorowanie jest dyfeomorfizmem, jeśli jest gładką bijekcją i odwzorowanie odwrotne też jest gładkie.

1. Rozmaitość^t jest
   a) lokalnie zwarta;
   b) lokalnie drogowo spójna;
   c) drogowo spójna, jeśli jest spójna.
2. (d_4 oznacza metrykę w $\mathbf{R}^4$; $f\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2, f(p) = [p]$)
   a) Sprawdź, że $h\colon \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ dane wzorem $h([(x, y, z)]) = (yz, xz, xy, x^2+2y^2+3z^2)$ jest różnowartościowe.
   b)$^{*?}$ Zdefiniujmy na $\mathbf{R}P^2$ metrykę wzorem $d(p, q) = d_4(h(p), h(q))$. Uzasadnij, że $U \subseteq \mathbf{R}P^2$ jest względem tej metryki otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(U)$ jest otwartym podzbiorem sfery.
3. Uzasadnij, że jeśli $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ jest gładkie i ma w 0 odwracalną pochodną, to F^{-1} (określone na otoczeniu $F(0)$ przez twierdzenie o funkcji odwrotnej) jest gładkie w pewnym otoczeniu $F(0)$.
4. Uzasadnij, że jeśli $n \neq m$, to nie istnieje gładkie i bijektywne $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, takie że F^{-1} jest też gładkie.
5. $^{*?}$ Udowodnij, że jeśli $n \neq m$, to nie istnieje gładkie i bijektywne $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.
6. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^N$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
   a)$^{*?}$ Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie U w $\mathbf{R}^N$, otwarty podzbiór W w $\mathbf{R}^n$ i gładki homeomorfizm $f\colon W \to M \cap U$ mający w każdym punkcie różnowartościową pochodną (gładkość i pochodna mają sens, gdy pomyśleć że $f\colon W \to \mathbf{R}^N$).
   b) Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie U tego punktu w $\mathbf{R}^N$ i gładka funkcja $F\colon U \to \mathbf{R}^{N-n}$ taka że DF_p jest epimorfizmem i $M \cap U = F^{-1}(F(p))$.
   c) Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie U tego punktu w $\mathbf{R}^N$ i dyfeomorfizm G tego otoczenia na pewne otoczenie V zera w $\mathbf{R}^N$, taki że $G(p) = 0$, $G(U \cap M) = V \cap \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\}$.