Rozmaitości różniczkowalne – Lista nr 1

1. Udowodnij, że każda zwarta spójna rozmaitość 1-wymiarowa bez brzegu jest homeomorficzna z okręgiem. Sklasyfikuj (z dokładnością do homeomorfizmu) rozmaitości 1-wymiarowe niezwarte i z brzegiem.

2. Jakie rozmaitości (z brzegiem lub bez) możemy skleić z prostokąta?

3. Zanurz wstęgę Möbiusa w $\mathbb{R}^3$ (tzn. napisz wzorem homeomorfizm na obraz).

4. Co otrzymamy rozcinając wstęgę Möbiusa wzdłuż rdzenia? A jeśli cięcie będziemy prowadzić wzdłuż innej linii równoległej do rdzenia?

5. Jaką rozmaitość otrzymamy doklejając 2-wymiarowy dysk do wstęgi Möbiusa wzdłuż brzegu?

6. Przez "pełny torus" rozumiemy 3-wymiarową rozmaitość z brzegiem ograniczoną przez torus standardowo zanurzony w $\mathbb{R}^3$. Dwie kopie pełnego torusa sklejamy brzegami w następujący sposób:
$$S^1 \times \partial D^2 \ni (\psi, \varphi) \mapsto (\varphi, \psi) \in S^1 \times \partial D^2$$
Pokazać, że otrzymamy rozmaitość. Jaką?

7. Zadaj strukturę rozmaitości na zbiorze 1-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$.

8. Jeśli dane są dwie spójne rozmaitości n-wymiarowe, M i N, możemy zdefiniować ich *sumę spójną* $M\#N$ w następujący sposób: wycinamy małą n-wymiarową kulkę w M i N i sklejamy obie nakłute rozmaitości wzdłuż otrzymanych brzegowych sfer. Określ czym są: $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$, $T^2\#T^2$. Pokaż, że $\mathbb{R}P^2\#T^2$ i $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ są homeomorficzne.