Rozmaitości, lista 2

$C^\infty(M)$ oznacza zbiór wszystkich gładkich funkcji z M w $\mathbf{R}$.

1. Uzasadnij, że dyfeomorfizm rozmaitości jest homeomorfizmem.
2. Niech $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{R}, \{Id, \mathbf{R}\})$, $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{R}, \{x \mapsto x^3, \mathbf{R}\})$. Czy $x \mapsto x^3$ jest dyfeomorfizmem z $\mathbf{R}_1$ na $\mathbf{R}_2$? z $\mathbf{R}_2$ na $\mathbf{R}_1$?
3. Sprawdź, że rzuty stereograficzne na $S^n \setminus \{N\}$, $S^n \setminus \{S\}$ zadają zgodne mapy. Sprawdź, że atlas złożony z tych dwóch map zadaje na S^n tę samą strukturę różniczkową co atlas opisany na wykładzie. [N/S to biegun północny/południowy.]
4. Uzasadnij, że mapy produktowe na $M \times N$ tworzą atlas.
5. Jeśli (x, U) jest mapą na M, to $x\colon U \to x(U)$ jest dyfeomorfizmem.
6. $f\colon M \to N$ jest gładka $\iff$ dla każdej mapy (y, V) z atlasu rozmaitości N i każdego i funkcja $y^i \circ f$ jest gładka (na swojej dziedzinie).
7. Gładkie $f\colon M \to N$ jest dyfeomorfizmem $\iff$ jest bijekcją i f^{-1} jest gładkie.
8. $f\colon M \to N$ jest gładkie $\iff$ dla każdego $g \in C^\infty(N)$ mamy $g \circ f \in C^\infty(M)$.
9. Sprawdź, że mapy na $\mathbf{R}P^n$ opisane na wykładzie są parami zgodne.
10. $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f|_{S^{n-1}} \in C^\infty(S^{n-1})$.
11. Czy każdą gładką funkcję na sferze S^{n-1} da się rozszerzyć do gładkiej funkcji na $\mathbf{R}^n$? [Chodzi o funkcje o wartościach rzeczywistych.]
12. Wyraź laplasjan $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ we współrzędnych biegunowych (r, θ).

13.^{t} Niech dany będzie zbiór M z rodziną podzbiorów $\{U_\alpha\}$ i różnowartościowych odwzorowań $x_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbf{R}^n$, taki że:
   a) $x_\alpha(U_\alpha)$ i $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ są otwarte w $\mathbf{R}^n$;
   b) $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}\colon x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ są dyfeomorfizmami;
   c) z rodziny $\{U_\alpha\}$ można wybrać przeliczalne pokrycie M;
   d) dla dwóch różnych $p, q \in M$ istnieje α takie że $p, q \in U_\alpha$ lub istnieją α, β takie że $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ i $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

   Udowodnij, że na M istnieje jedyna struktura różniczkowa dla której (x_α, U_α) są mapami. [Wsk. lokalna zwartość+$T_2 \Rightarrow$ regularność.]

14. Grassmmanniann G_k^n to zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\mathbf{R}^n$. Zdefiniuj strukturę rozmaitości na G_k^n. Sprawdź jaka jest poprawna pisownia słowa Grassmmanniann.
15. Udowodnij, że jeśli rozmaitość M jest spójna to dowolne dwa jej punkty można połączyć krzywą gładką: $(\forall p, q \in M)(\exists c\colon [0,1] \to M)(c(0) = p, c(1) = q$ i c jest gładkie$)$. Sprecyzuj jak rozumiesz gładkość w końcowych punktach przedziału. Zmodyfikuj to zadanie tak, aby stało się trudniejsze.