Rozmaitości, lista 3

1. Niech $f, g \in C^\infty(M)$, (x, U) – mapa na M, $p \in U$, $\ell = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. Sprawdź, że $\ell(fg) = f(p)\ell(g) + \ell(f)g(p)$.
2. Niech $f\colon M^m \to N^n$ będzie gładkie, $m \leq n$, $\text{rząd}_p(f) = m$. Uzasadnij, że dla każdej mapy x na otoczeniu p istnieje mapa y na otoczeniu $f(p)$, taka że na pewnym otoczeniu $x(p)$ zachodzi wzór $y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \ldots, a^m) = (a^1, \ldots, a^m, 0, \ldots, 0)$.
3. Jeśli $f\colon M^m \to N^n$ jest immersją, to dla każdego $p \in M$ istnieją: otoczenie U punktu p w M i mapa (y, V) na N wokół $f(p)$ — takie że $f(U) \cap V = \{q \in M \mid y^{m+1}(q) = \ldots = y^n(q) = 0\}$.
4. Jeśli $\iota\colon M^m \to N^n$ jest immersją, to dla każdego $p \in M$, każdego otoczenia U punktu p w M i każdej funkcji gładkiej $f\colon U \to \mathbf{R}$ istnieją: mapa (y, V) na N wokół $\iota(p)$, gładka funkcja $g\colon V \to \mathbf{R}$ i otoczenie U' punktu p zawarte w U — takie że $g \circ \iota(q) = f(q)$ dla wszystkich $q \in U'$. Czy zawsze można przyjąć $U = U'$?
5. Niech $\iota\colon M \to N$ będzie podrozmaitością regularną, $f\colon P \to N$ funkcją gładką (P to jakaś rozmaitość), $f(P) \subseteq \iota(M)$.
   a) Podaj przykład pokazujący że $\iota^{-1} \circ f$ nie musi być ciągłe.
   b) Udowodnij, że jeśli $\iota^{-1} \circ f$ jest ciągłe, to jest też gładkie.
6. Narysuj kilka własnych przykładów podrozmaitości różnej jakości.
7. Sprawdź, że podzbiór $\mathbf{R}^3$ zadany równaniem $x^2 + 2xy^3 + yz^3 = 4$ jest podrozmaitością domkniętą.
8. Napisz możliwie skomplikowany układ dwóch równań wielomianowych trzech zmiannych, o którym potrafisz udowodnić, że zadaje domkniętą podrozmaitość $\mathbf{R}^3$.
9. Uzasadnij, że jeśli $\iota\colon M^m \to N^n$ jest podrozmaitością włożoną, to dla każdego $p \in M$ istnieją: otoczenie V punktu $\iota(p)$ w N i funkcja $F\colon V \to \mathbf{R}^{n-m}$ — takie że F ma rząd $n - m$ w każdym punkcie zbioru V i $M \cap V = F^{-1}(0)$. Jak Ci się wydaje – czy zawsze można wybrać jedną funkcję $F\colon N \to \mathbf{R}^{m-n}$ i używać po prostu jej obcięć do rozważanych zbiorów V?
10. Niech $\iota\colon M \to N$ będzie podrozmaitością włożoną. Udowodnij, że na zbiorze $\iota(M)$ istnieje jedyna struktura rozmaitości dla której identycznościowe włożenie $\iota(M)$ w N jest podrozmaitością włożoną. Pokaż na przykładzie, że dla podrozmaitości regularnej analogiczny fakt może nie zachodzić.
11. Przestrzeń P prostych w $\mathbf{R}^n$ przechodzących przez 0 utożsamiamy z $\mathbf{R}P^{n-1}$ przez odwzorowanie $\ell \mapsto \ell \cap S^{n-1}$. Uzasadnij, że podzbiór $Q = \{(q, \ell) \in \mathbf{R}^n \times P \mid q \in \ell\}$ rozmaitości $\mathbf{R}^n \times P$ jest jej podrozmaitością domkniętą. Uzasadnij, że $\{0\} \times P \subset Q$ i że $Q \setminus (\{0\} \times P)$ jest dyfeomorficzne z $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ (przez rzut na pierwszą współrzędną). Rozmaitość Q (z obciętym do niej rzutem na $\mathbf{R}^n$) nazywamy *rozdmuchaniem* $\mathbf{R}^n$ w punkcie 0 (ang. *blow-up*).
12. Czy potrafisz zdefiniować rozdmuchanie rozmaitości w punkcie? [wsk: użyj mapy; zastanów się, czy rezultat zależy od wyboru mapy – i co w ogóle taka niezależność znaczy]
13. $SO(n) := \{M \in SL_n(\mathbf{R}) \mid MM^\top = I\}$ jest zwartą podrozmaitością $GL_n(\mathbf{R})$.