Rozmaitości, lista 4

1. ^{t} Udowodnij, że przestrzeń parazwarta jest normalna.
2. Udowodnij, że każda funkcja gładka na rozmaitości spójnej jest niemal jednostajną granicą gładkich funkcji o zwartych nośnikach.
3. Udowodnij, że każdą funkcę ciągłą na rozmaitości można jednostajnie przybliżać funkcjami gładkimi.
4. Niech X będzie podzbiorem rozmaitości M, zaś $\mathcal{U}$ rodziną otwartych podzbiorów M której suma zawiera domknięcie X. Załóżmy, że dla każdego $U \in \mathcal{U}$ dana jest gładka funkcja $f_U\colon U \to \mathbf{R}$. Załóżmy też, że ilekroć jakiś punkt p zbioru X należy do dwóch zbiorów U, V rodziny $\mathcal{U}$, to $f_U(p) = f_V(p)$. Udowodnij, że istnieje $f \in C^\infty(M)$, taka że dla każdego $U \in \mathcal{U}$ obcięcie f do $X \cap U$ pokrywa się z obcięciem f_U do tego zbioru.
5. Udowodnij, że funkcję gładką określoną na domkniętej podrozmaitości można rozszerzyć do funkcji gładkiej na całej rozmaitości. Co więcej, jeśli podrozmaitość jest zawarta w pewnym otwartym zbiorze, to można znaleźć rozszerzenie którego nośnik jest też w tym zbiorze zawarty. Innymi znaczki:
   Niech $\iota\colon M \to N$ będzie domkniętą podrozmaitością rozmaitości N, U otwartym podzbiorem N zawierającym $\iota(M)$, $f\colon M \to \mathbf{R}$ funkcją gładką. Udowodnij, że istnieje gładka funkcja $F\colon N \to \mathbf{R}$ o nośniku zawartym w U, taka że $F \circ \iota = f$.
6. ^{t} Niech M będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbf{R}^n$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
   a) M jest metryzowalna;
   b) M jest parazwarta;
   c) każda składowa spójna M ma przeliczalną bazę topologii;
   d) każda składowa spójna M jest σ-zwarta.
7. Czy da się sensownie zdefiniować na zwartej rozmaitości następujące własności funkcji: wielomianowość, C^k, lipschitzowskość, hölderowskość, analityczność, harmoniczność, L^p, W_p^k, H^s, ... [nie wiem jak się oznacza przestrzenie Biesowa, ani nawet co to jest]

---

8. Uzasadnij, że $SO(3)$ jest dyfeomorficzna z $\mathbf{R}P^3$.
9. Rozważając działanie $SL_2(\mathbf{R})$ na górnej półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ dane wzorem $\binom{a\,b}{c\,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pokaż, że każda macierz z $SL_2(\mathbf{R})$ jednoznacznie zapisuje się w postaci
$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
   gdzie $n \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Udowodnij, że $SL_2(\mathbf{R})$ jest dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbf{R}^2$.
10. Niech $SU(n) = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid MM^* = I, \det(M) = 1\}$. Uzasadnij, że $SU(n)$ jest zwartą podrozmaitością $M_n(\mathbf{C})(= \mathbf{C}^{n^2} = \mathbf{R}^{2n^2})$.
11. Udowodnij, że $SU(2)$ jest dyfeomorficzne z S^3.