Rozmaitości, lista 5

Oznaczenia: $Or(V)$ to (dwuelementowy) zbiór orientacji przestrzeni liniowej V. Jeśli $\pi\colon E \to B$ jest wiązką wektorową, to włókno $\pi^{-1}(p)$ oznaczamy też E_p.

1. Sprawdź równoważność wszystkich trzech znanych Ci definicji wektora stycznego. Sprawdź też zgodność odpowiadających im definicji f_*.
2. Używając każdej z trzech definicji wektora stycznego opisz, co znaczy że wektor $v \in T_pM$ jest styczny do podrozmaitości N (do której należy p).
3. Udowodnij, że $f\colon M \to N$ jest immersją wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $p \in M$ odwzorowanie $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ jest monomorfizmem. Udowodnij, że rząd f w p jest równy rzędowi f_{*p}.
4. Niech $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + yz + 3t - 1 = xy^2z + t^2y = 0\}$, niech $p = (1, 1, 0, 0)$. Wyznacz T_pM.
5. Wyznacz przestrzenie styczne do podrozmaitości $SL(n)$ i $SO(n)$ rozmaitości $M_n(\mathbf{R})$ w punkcie I (i – jeśli potrafisz – w innych punktach).
6. Uzasadnij, że jeśli gładkie $f\colon M \to M$ zachowuje podrozmaitość N (tzn. $f(N) \subseteq N$), to $f_*(TN) \subseteq TN$.
7. Uzasadnij, że jeśli $r \in \mathbf{R}$ jest wartością regularną funkcji $f \in C^\infty(M)$, a $v \in T_p(f^{-1}(r))$, to $v(f) = 0$.
8. Uzasadnij, że gładkie pole wektorowe na domkniętej podrozmaitości można zawsze rozszerzyć do gładkiego pola wektorowego na rozmaitości. Czy założenie domkniętości jest istotne?
9. Zdefiniuj jakieś gładkie nie wszędzie zerowe pole wektorowe na S^2. Zdefiniuj gładkie (lub choć ciągłe) pole wektorowe na S^2 zerujące się tylko w jednym punkcie. Narysuj jak ono wygląda w otoczeniu tego punktu.
10. Udowodnij, że każda derywacja algebry funkcji gładkich na rozmaitości jest zadana przez *gładkie* pole wektorowe.
11. Udowodnij, że rozmaitość M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy gdy ma atlas którego odwzorowania przejścia mają dodatnie Jacobiany (tzw. atlas zgodnie zorientowany).
12. Udowodnij, że rozmaitość jest orientowalna wtedy i tylko wtedy gdy każdy atlas można przerobić na zgodnie zorientowany składając niektóre (zmyślnie wybrane) jego mapy z przekształceniem $(a^1, a^2, \ldots, a^n) \mapsto (-a^1, a^2, \ldots, a^n)$.
13. Uzasadnij, że wstęga Möbiusa nie jest rozmaitością orientowalną.
14. Udowodnij, że rozmaitość TM jest zawsze rozmaitością orientowalną.
15. Które powierzchnie zwarte (bez brzegu) są orientowalne?
16. Niech $\pi\colon E \to B$ będzie wiązką wektorową; niech $Or(E) = \bigcup_{p\in B} Or(\pi^{-1}(p))$ będzie zbiorem wszystkich możliwych orientacji włókien tej wiązki. Rzut $\pi_{or}\colon Or(E) \to B$ definiujemy posyłając $Or(\pi^{-1}(p))$ w p. Wprowadź topologię na $Or(E)$, tak by π_{or} był lokalnym homeomorfizmem. Uzasadnij, że orientacja E to (ciągłe) cięcie odwzorowania π_{or}. Udowodnij, że wiązka nad przestrzenią spójną ma najwyżej dwie orientacje.
17. Zdefiniuj precyzyjnie wiązkę $End(E)$ której włóknem nad p będzie $End(E_p)$. Sprawdź porządnie że jest to naprawdę wiązka wektorowa, gładka jeśli E jest gładka.

18.* Zanurz butelkę Kleina K jako domkniętą podrozmaitość w spójną zamkniętą (tzn. zwartą i bez brzegu) trójwymiarową rozmaitość M tak, aby $M \setminus K$ miało dwie składowe spójne.