Rozmaitości, lista 6

1. Zapisz we współrzędnych biegunowych:
   a) pola wektorowe $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $xy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y}$;
   b) 1-formy dx, dy, $xy\,dx + x^2\,dy$;
   c) pole tensorowe $x^2\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx \otimes dy + y\frac{\partial}{\partial y} \otimes dy \otimes dx$.
2. Wyznacz drugą formę podstawową powierzchni $z = 2x^2 - 3y^2$ w punkcie (a) $(0,0,0)$ (b) $(3,2,6)$.
3. Podaj kilka przykładów pól wektorowych na $\mathbf{R}^2$ których potoki są/nie są określone dla wszystkich $t \in \mathbf{R}$.
4. Niech $c(t) = 0$ dla $t \le 0$ i $c(t) = e^{-1/t^2}$ dla $t > 0$. Niech $d(t) = 0$ dla wszystkich t. Zdefiniujmy pole wektorowe na $(-\infty, 1)$ następująco: $X(x) = 0$ dla $x \le 0$, $X(x) = c'(c^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x}$ dla $x > 0$. Uzasadnij, że c i d są krzywymi całkowymi tego pola. Wytłumacz, co jest źle i dlaczego.
5. Uzasadnij wzory $\mathcal{L}_X(fY) = Xf \cdot Y + f\mathcal{L}_X Y$, $\mathcal{L}_X(f\omega) = Xf \cdot \omega + f\mathcal{L}_X\omega$,
6. Niech X, Y będą polami wektorowymi na $\mathbf{R}^n$. Można wówczas określić pochodną pola $Y = \sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ w kierunku pola X wzorem $\nabla_X(\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum X(a^i)\sum\frac{\partial}{\partial x^i}$. Czy jest prawdą, że $\nabla_X(Y) = \mathcal{L}_X Y$?
7. Przekontempluj równość $(\varphi_{-t*}Y)_p = (\varphi_{-t})_{*\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)})$.
8. Uzasadnij wzór $(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[Y_p - (\varphi_{t*}Y)_p\right]$.
9. Dla $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ i $Y = \sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ policz $\mathcal{L}_X Y$ wprost z definicji.
10. Niech ω będzie gładką 1-formą na M (tzn. gładkim cięciem wiązki T^*M), X gładkim polem wektorowym na M zaś φ_t potokiem pola X. Uzasadnij, że dla każdego punktu $p \in M$ zachodzi $\lim_{t\to 0}(\varphi_t^*\omega)_p = \omega_p$.
11. Uzasadnij, że jeśli pole wektorowe X na rozmaitości M jest styczne do jej podrozmaitości N, to $\phi_t^X(N) \subseteq N$.
    [Wsk. to oczywiście nieprawda; jakiego założenia brakuje?]
12. Dla $M \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ definiujemy $X_M \in \mathcal{X}(GL_n(\mathbf{R}))$ wzorem $(X_M)_g = (L_g)_*(M_e)$ (gdzie $L_g\colon GL_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R})$ jest określone jako $L_g(h) = gh$, zaś e oznacza macierz identycznościową)
    a) Uzasadnij, że X_M jest naprawdę gładkie.
    b) Uzasadnij, że $\varphi_t^{X_M}(g) = g\exp(tM)$.
    c) Udowodnij, że jeśli G jest podrozmaitością i jednocześnie podgrupą $GL_n(\mathbf{R})$, a $M \in T_eG$, to $\exp(M) \in G$ (a nawet $\exp(tM) \in G$ dla wszystkich $t \in \mathbf{R}$). Skonkretyzuj to stwierdzenie do przypadków $SO(n), SL(n), Sp(n), \ldots$.
13. Niech dane będzie gładkie odwzorowanie $\psi\colon \mathbf{R} \times M \to M$, takie że $\psi(t+s,p) = \psi(t,\psi(s,p))$ (dla dowolnych $t,s \in \mathbf{R}$, $p \in M$). Uzasadnij, że rodzina $\{\psi(t,\cdot) \mid t \in \mathbf{R}\}$ dyfeomorfizmów rozmaitości M jest potokiem pewnego (gładkiego) pola wektorowego na M.

---

14. Zdefiniuj $\mathcal{L}_X A$ dla pola wektorowego X i pola tensorowego A typu (a) $(0,q)$; (b) $(1,1)$; (c) (p,q). Sformułuj i udowodnij różnorakie wzory typu reguły Leibniza, na przykład $\mathcal{L}_X(S\otimes T) = (\mathcal{L}_X S)\otimes T + S\otimes(\mathcal{L}_X T)$, $\mathcal{L}_X[T(Y,Z)] = (\mathcal{L}_X T)(Y,Z) + T(\mathcal{L}_X Y, Z) + T(Y, \mathcal{L}_X Z)$ (dla T typu (0,2) i pól wektorowych Y, Z).