Rozmaitości, lista 7

1. Niech X będzie gładkim polem wektorowym na rozmaitości M stycznym do jej podrozmaitości N (tzn. dla każdego $q \in N$ mamy $X_q \in T_q N$). Sprawdź porządnie, że wtedy obcięcie pola X do N jest *gładkim* polem wektorowym na N.
2. Niech N będzie podrozmaitością M, $p \in N$, $v \in T_p M$. Udowodnij, że $v \in T_p N$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji $f \in C^\infty(M)$ stałej na N zachodzi $v(f) = 0$.
3. Używając poprzedniego zadania sprawdź, że jeśli pola wektorowe X, Y na rozmaitości M są styczne do podrozmaitości N, to $[X, Y]$ też jest styczne do N.
4. Porządnie przeprowadź dowód parazwartości liścia naszkicowany na wykładzie.
5. Zbadaj inwolutywność dystrybucji na $\mathbf{R}^3$:
   a) $\mathrm{Lin}(2y\partial_y - z\partial_z, -2yz\partial_x + 3x^2\partial_z)$
   b) $\mathrm{Lin}(\partial_z - x\partial_x - y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y)$
   Zignoruj punkty gdzie podane wektory są liniowo zależne.
6. Dla liniowej podprzestrzeni V w $M_n(\mathbf{R})$ określamy dystrybucję Δ^V na $GL_n(\mathbf{R})$ wzorem $\Delta^V_g = gV = \{gM \mid M \in V\}$. Sprawdź, czy ta dystybucja jest inwolutywna w następujących przypadkach:
   a) $V = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in R\}$;
   b) $V = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in R\}$;
   c) $V = \{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$;
   d) $V = \{\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$;
   c) $V = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbf{R}\}$.

   Jeśli tak, wyznacz maksymalną rozmaitość całkową przechodzącą przez e (macierz identycznościową) i sprawdź bezpośrednio że jest ona podgrupą.
7. Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zauważ, że $M \in T_e G$ dla $G = \{\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$.
   Napisz pole X_M na G we współrzędnych (x, y, z).

---

8. Niech G i H będą podrgupami i podrozmaitościami $GL_n(\mathbf{R})$ i $GL_k(\mathbf{R})$ odpowiednio, zaś $\phi\colon G \to H$ gładkim homomorfizmem (gładkość jest w tej sytuacji konsekwencją ciągłości). Uzasadnij, że $\Gamma_\phi = \{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$ jest podrozmaitością i podgrupą $GL_n(\mathbf{R}) \times GL_k(\mathbf{R}) \subseteq GL_{n+k}(\mathbf{R})$. Wywnioskuj stąd, że $T_e\Gamma_\phi$ jest zamknięta na komutator (jako podprzestrzeń $M_{n+k}(\mathbf{R})$), i dalej że $\phi_{*e}\colon T_e G \to T_e H$ zachowuje komutator.
9. (Oznaczenia jak w poprzednim zadaniu; zakładamy ponadto spójność G.) Odwróć poprzednie zadanie używając tw. Frobeniusa:
   a) pokaż, że dowolne liniowe i zachowujące komutator $\eta\colon T_e G \to T_e H$ jest pochodną co najwyżej jednego gładkiego homomorfizmu $\phi\colon G \to H$;
   b) udowodnij, że takie ϕ można określić lokalnie w otoczeniu e i że jest ono ‘lokalnym homomorfizmem’ (zdefiniuj!);
   c) pokaż na przykładzie, że nie zawsze ϕ da się rozszerzyć na całe G.