Rozmaitości, lista 8

1. Załóżmy, że $\omega \in \Omega^1(M)$; niech $\Xi\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ będzie dane wzorem $\Xi(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$.
   a) Uzasadnij, że istnieje na M pole tensorowe ξ typu $(0,2)$, takie że $\Xi(X,Y)(p) = \xi_p(X_p, Y_p)$ dla każdego $p \in M$.
   b) Uzasadnij, że ξ jest antysymetryczne.
   c) Udowodnij, że $\xi = d\omega$.
2. Niech $\omega = \sum_i (-1)^i x^i dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^i} \ldots \wedge dx^n$ będzie $(n-1)$-formą na $\mathbf{R}^n$, zaś $\iota\colon S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ niech będzie standardowym włożeniem sfery jednostkowej. Uzasadnij, że $\iota^*\omega$ nie znika w żadnym punkcie; sprawdź, że jest niezmiennicza na obroty; oblicz $\int_{S^{n-1}} \iota^*\omega$.
3. Uzasadnij, że $H^1_{DR}(\mathbf{R}^n) = 0$:
   a) Niech $\omega = a\,dx + b\,dy \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$ spełnia $d\omega = 0$. Połóżmy $F(x,y) = \int_0^x a(t,0)dt + \int_0^y b(x,s)ds$. Sprawdź, że $dF = \omega$.
   b) Wykaż, że jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbf{R}^n)$ spełnia $d\omega = 0$, to istnieje $F \in \Omega^0(\mathbf{R}^n)[= C^\infty(\mathbf{R}^n)]$, taka że $dF = \omega$. Czy taka funkcja F jest jedyna?
4. Uzasadnij, że $f^1, \ldots, f^k \in V^*$ są liniowo niezależne $\iff f^1 \wedge \ldots \wedge f^k \neq 0$.
5. Wykaż, że jeżeli funkcjonały $f^1, \ldots, f^k \in V^*$ są liniowo niezależne i $\mathrm{Lin}(f^1, \ldots, f^k) = \mathrm{Lin}(g^1, \ldots, g^k)$, to $g^1 \wedge \ldots \wedge g^k = C \cdot f^1 \wedge \ldots \wedge f^k$ dla pewnej niezerowej liczby rzeczywistej C.
6. Z tw. Stokesa wywnioskuj tw. o dywergencji w dowolnym wymiarze.
7. Niech $F\colon M \times [0,1] \to N$ będzie ciągłym odwzorowaniem takim że $F(\cdot,0)$ i $F(\cdot,1)$ są gładkie. Uzasadnij, że istnieje gładkie $G\colon M \times [0,1] \to N$, takie że $G(\cdot,0) = F(\cdot,0)$ i $G(\cdot,1) = F(\cdot,1)$. [To może być za trudne; zrób przypadek $M = N = S^1$, lub też przypadek $N = S^n$.]
8. Niech $f\colon M \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem rozmaitości z brzegiem, przekształcającym brzeg w brzeg. Niech $p \in \partial M$. Zdefiniuj $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ [sprawdź poprawność definicji].
9. Niech $f\colon M \to \mathbf{R}$ będzie gładka, zaś y niech będzie wartością regularną f. Uzasadnij, że $\{p \in M \mid f(p) \leq y\}$ jest rozmaitością z brzegiem.
10. Niech M będzie rozmaitością z brzegiem; zadaj strukturę rozmaitości (bez brzegu) na dublu M: sumie dwóch kopii M sklejonej przez identycznościowe utożsamienie ich brzegów. Czym jest dubel pełnego torusa?
11. Dla gładkiego $f\colon S^1 \to S^1$ definiujemy *stopień* f wzorem $\deg(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f^* d\theta$.
    a) Uzasadnij, że jeśli f i g są homotopijne, to $\deg(f) = \deg(g)$.
    b) Niech $f_n(z) = z^n$. Oblicz $\deg(f_n)$.
    c) Wykaż, że jeśli $\omega \in \Omega^1(S^1)$ spełnia $\int_{S^1}\omega = 2\pi$, to istnieje funkcja $H\colon S^1 \to \mathbf{R}$ taka że $dH = d\theta - \omega$. (Wsk. przyjmij $H(z) = \int_1^z (d\theta - \omega)$.) Wywnioskuj stąd, że w definicji stopnia można zastąpić $d\theta$ przez ω.
    d) Dobierając ω o nośniku w pobliżu wartości regularnej w funkcji $f\colon S^1 \to S^1$ uzasadnij, że stopień f jest równy liczbie punktów w $f^{-1}(w)$ – liczonej ze znakami (dokładnie jak?). Wywnioskuj stąd, że stopień jest zawsze liczbą całkowitą.
    e) Uzasadnij, że jeśli $n = \deg(f)$, to wzór $f(z,t) = \exp\big(i(t\int_1^z f_n^* d\theta + (1-t)\int_1^z f^* d\theta)\big)$ zadaje homotopię miedzy f a f_n.

    [$\int_1^z$ rozumiemy jako całkę po najkrótszym łuku biegnącym przeciwzegarowo od 1 do z. To oczywiście zmusza do sprawdzania ciągłości różnych wyrażeń w 1. $f, g\colon S^1 \to S^1$ są homotopijne jeśli istnieje gładkie (równoważnie: ciągłe) $F\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ takie że $F(\cdot,0) = f$ i $F(\cdot,1) = g$.]