Rozmaitości, lista 9

1. Uzasadnij, że jeśli (X, Y) jest dodatnio zorientowaną bazą $T_p\Sigma$, to

$$K_p = \frac{II(X,X)II(Y,Y) - II(X,Y)II(Y,X)}{I(X,X)I(Y,Y) - I(X,Y)I(Y,X)}$$

2. Niech $\gamma\colon (0,1) \to \mathbf{R}^3$ ma własność: $(\forall t \in (0,1))(\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0)$. Rozważmy $\Gamma\colon (0,1) \times (0,+\infty) \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$ (opisz ten przepis słowami).
   a) Uzasadnij, że Γ jest immersją;
   b) Uzasadnij, że krzywizna Gaussa Γ jest równa 0.
   c) Podaj przykład takiej krzywej γ, dla której Γ nie jest kawałkiem płaszczyzny, walca ani stożka.
3. Przekształcenie $T_p\Sigma \ni X \mapsto D_X N \in T_p\Sigma$ nazywamy operatorem kształtu. Uzasadnij, że jest to operator samosprzężony (względem I), a iloczyn jego wartości własnych to krzywizna Gaussa.
4. Niech Σ powstaje z obrotu wykresu $y = f(x)$ wokół osi OX.
   a) Uzasadnij, że Σ można sparametryzować tak: $F(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$.
   b) Uzasadnij, że F_u i F_v są wektorami własnymi operatora kształtu.
   c) Wylicz odpowiednie wartości własne i krzywiznę Gaussa:

$$k_u = -\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad k_v = \frac{1}{f(1+f'^2)^{1/2}}, \quad K = -\frac{f''}{f(1+f'^2)^2}$$

5. Wylicz krzywiznę Gaussa i krzywiznę średnią ($H = \frac{1}{2}(k_u + k_v)$) katenoidy: powierzchni powstałej przez obracanie wykresu $y = c \cdot \cosh(x/c)$ wokół osi OX.
6. Czy potrafisz znaleźć powierzchnię obrotową której krzywizna Gaussa jest stała i równa -1?
7. Uzasadnij, że jeśli $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ jest gładką jednoparametrową rodziną zwartych powierzchni zorientowanych, to $\int_{\Sigma_t} K dA$ nie zależy od t. [Nieco precyzując, zakładamy że jest dane odwzorowanie $\iota\colon \Sigma \times [0,1] \to \mathbf{R}^3$ takie że dla każdego $t \in [0,1]$ obcięcie ι do $\Sigma \times \{t\}$ jest włożoną zwartą zorientowaną powierzchnią w $\mathbf{R}^3$.]