$Cl(\Sigma) = ?$ AJ1

Tw (Abel)

Niech $D=\sum p_i - q_i$; wtedy: ułożone

$\exists f\in \mathcal{M}(\Sigma): (f)=D \iff \exists$ krzywe γ_i z q_i do p_i tże $\sum_i \int_{\gamma_i}\omega = 0$ dla wszystkich $\omega\in H^{1,0}$.

np. $\Sigma=\overline{\mathbb{C}} \Rightarrow H^{1,0}=0$ (bo $H^1_{DR}(\overline{\mathbb{C}})=0$), więc każdy D stopnia 0 jest postaci (f).

wystarczy napisać $f=\prod \frac{z-p_i}{z-q_i}$

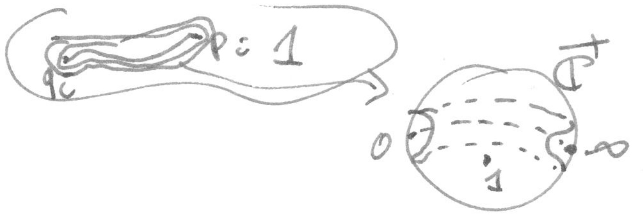
D-d

$\Leftarrow$

bzo: budujemy $F_i:\Sigma\to\overline{\mathbb{C}}$ tak by: $F_i(z_i)=z_i$ w p_i (zero) - jedyne

$F_i(w_i)=w_i^{-1}$ w q_i (biegun) jedyny

$F_i^{-1}[0,\infty]=\gamma_i$,



$F:=\prod F_i$; szukamy $f=e^uF$, $u\in C^\infty(\Sigma)$

$0\overset{?}{=}\bar\partial f=\bar\partial(e^uF)=\bar\partial(e^u\prod F_i)=\bar\partial u\cdot e^u F+\sum_i e^u F\cdot\frac{1}{F_i}\bar\partial F_i$

$\bar\partial u=\sum -\underbrace{F_i^{-1}\bar\partial F_i}_{\chi_i\in\Omega^{0,1}(\Sigma)}$ (χ_i znika w ot. p_i/q_i)

Czy $\sum\chi_i=0$ w $H^{0,1}$? Tak, jeśli $\forall \omega\in H^{1,0}$ $\int_\Sigma \sum \omega\wedge\chi_i=0$

$B(\sum\omega,\sum\chi_i)=0$,

Lemat $\int_\Sigma \omega\wedge\chi_i = 2\pi i\int_{\gamma_i}\omega$

Na Σ rozciętej wzdłuż γ_i można określić $\log F_i$ - na cięciu ze skokiem $2\pi i$

$\chi_i=\bar\partial\log F_i$. Stokes. $\int\omega\wedge\chi_i=\int\omega\wedge\bar\partial\log F_i=\int d(\log F_i\,\omega)=\int_\partial \log F_i\,\omega$ □□

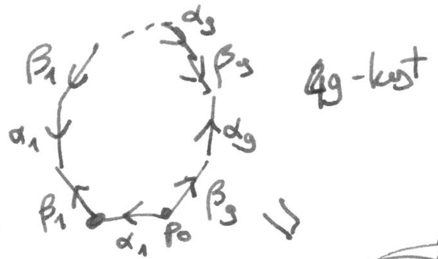
$\Rightarrow$ $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{C}}$; bzo bez wartości krytycznych na $[-\infty, 0]$. $(f \to \lambda_i f)$ (A)2

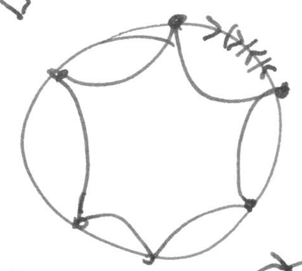
wtedy $f^{-1}[0,\infty]$ daje krzywe $\gamma_i : q_i \to p_i$ (w pewnej permutacji)

budujemy F jak wyżej; wtedy $f = e^u F$, $u \in C^\infty(\Sigma)$, $\bar\partial u = \sum - F_i^{-1}\bar\partial F_i$

$$\sum \int_{\gamma_i} \omega \underset{j.w}{=} \sum \int \omega \wedge \chi_i = \pm \int \omega \wedge \bar\partial u = \int_\Sigma d(u\omega) = 0. \qquad \square$$

Jacobian:

$\Sigma = \Sigma_g =$  $\simeq$  4g-kąt

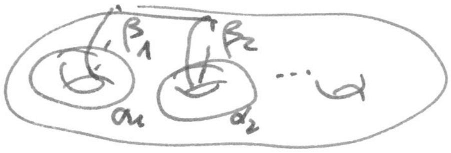


Każda zamknięta krzywa w Σ (zaczepiona w p_0) jest homotopijna z krzywą zbudowaną z α_i, β_i

$\Updownarrow$

dla każdej zamkniętej γ w Σ istnieją $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$ że $\forall \omega \in H^{1,0}$

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \left(n_i \int_{\alpha_i} \omega + m_i \int_{\beta_i} \omega \right)$$



Wybieramy $\omega_1 \ldots \omega_g$ - baza $H^{1,0}$

Periody: $\Pi_i := \left(\int_{\alpha_i} \omega_j \right)_{j=1..g} \in \mathbb{C}^g$

$\Pi_i' := \left(\int_{\beta_i} \omega_j \right) \in \mathbb{C}^g$

$$\Lambda = \sum \mathbb{Z}\Pi_i + \sum \mathbb{Z}\Pi_i'$$

Lemat $\{\Pi_i, \Pi_i' \mid i = 1..g\}$ są $\mathbb{R}$-lnz w $\mathbb{C}^g$

Jeśliby $\sum s_i \Pi_i + s_i' \Pi_i' = 0$, to $\forall_j \sum_i s_i \int_{\alpha_i} \omega_j + s_i' \int_{\beta_i} \omega_j = 0$ $\}$ sprzężenie

ale $(\omega_j, \overline{\omega_j})$ to baza $H^{1,0} \oplus H^{0,1} \simeq H^1$ $\quad s_i \int_{\alpha_i} \overline{\omega_j} + s_i' \int_{\beta_i} \overline{\omega_j} = 0$

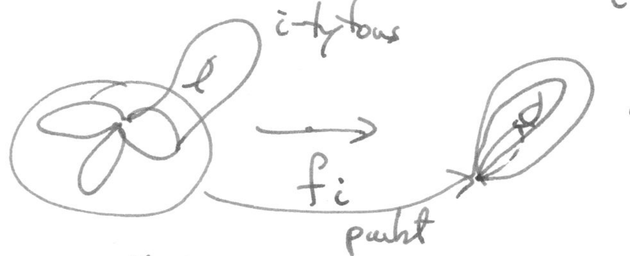
~~Tymczasem ścisłej~~

Zatem: $\forall [\omega] \in H^1$ ($\exists\, \omega \in \Omega^1(\Sigma)$, $d\omega = 0$): $\sum s_i \int_{\alpha_i} \omega + s_i' \int_{\beta_i} \omega = 0$ (*)

dla: ścisłych form $\eta_i, \xi_i \in H^1$ "duale" do α_i, β_i:

$$\int_{\alpha_i} \eta_k = \delta_{ik}, \quad \int_{\beta_i} \eta_k = 0$$

$$\int_{\alpha_i} \xi_k = 0, \quad \int_{\beta_i} \xi_k = \delta_{ik}$$



$d\theta_i, d\varphi_i$

$\eta_k = f_k^* d\theta_k$

$\xi_k = f_k^* d\varphi_k$

ze wzoru (*) dla $\omega = \eta_k, \xi_k$ dostajemy $s_k = 0$, $s_k' = 0$ ∎

Czyli Λ jest kratą w $\mathbb{C}^g$, $\mathbb{C}^g/\Lambda$ jest $2g$-wymiarowym ~~zespolonym~~ torusem

tzw. Jacobianem powierzchni Σ: $\mathrm{Jac}(\Sigma) = \mathbb{C}^g/\Lambda$.

Niech $D = \sum p_i - q_i$; wybieramy drogi $\gamma_i : q_i \to p_i$ (być może powtarzające)

wtedy ~~tablica~~ wektor

$\mu(D) := \left(\sum_i \int_{\gamma_i} \omega_j \mid j = 1, \dots, g\right) \in \mathbb{C}^g/\Lambda$ jest dobrze określony i niezależny od wyboru γ_i.

<u>TW (Abel)</u>

Niech D będzie dywizorem stopnia 0.

$$\exists f \in \mathcal{M}(\Sigma) : (f) = D \iff \mu(D) = 0$$

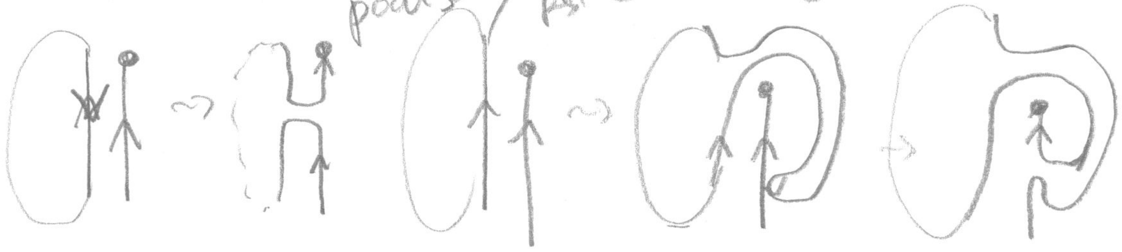
$\Rightarrow$ nawet więcej pokazaliśmy

$\Leftarrow$ do γ_i dokładamy kombinację α_i, β_i by dostać Γ: $\int_\Gamma \omega_j = 0$

Przerabiamy Γ na kolekcję ~~krzyw~~ ułożonych dróg:

lub: homotopuj do 1-szkieletu triangulacji.

podłączamy pętle do dróg:



$\square$

$\mathrm{Div}^0(\Sigma)$ - dywizory stopnia 0

$\mathrm{Cl}^0(\Sigma)$ = klasy liniowej równoważności dywizorów stopnia 0.

Abel: $\mathrm{Cl}^0(\Sigma) \overset{\mu}{\hookrightarrow} \mathrm{Jac}(\Sigma) = \mathbb{C}^g/\Lambda$

[Swoją $\mathrm{Cl}(\Sigma) \simeq \mathrm{Cl}^0(\Sigma) \times \mathbb{Z}$; dla wybranego $p \in \Sigma$
$D \longmapsto (D - \deg D \cdot p\,,\ \deg D)$ jest izo.]

TW (Jacobi)
$\mu : \mathrm{Cl}^0(\Sigma) \to \mathrm{Jac}(\Sigma)$ jest na.

D-d
$S^d\Sigma = \Sigma^d / S_d$ ma strukturę zespolonej zwartej rozmaitości (lokalnie wygląda jak $\mathbb{C}^d$); to jest przestrzeń efektywnych dywizorów stopnia d

$P = [(\cancel{p_1, \dots, p_d})] \in S^d\Sigma$, ~~$z_1, \dots, z_d$ - wsp w $p_1 - p_d$~~ z

wtedy $a_1(z_1 \dots z_d), \dots, a_d(z_1, \dots z_d)$ (funkcje symetryczne)

dają ~~atlas~~ wsp. na $S^d\Sigma$ wokół ~~$(p_1 - p_d)$~~ P.

Niech $d > 10g =: N$

Jeśli $p \in \Sigma$, $P = (p, \ldots, p) \in S^k\Sigma$, z - wsp. w p $(p \sim z = 0)$ A]5

to punkty $P' = (p_1, \ldots, p_k)$ leżące blisko P są opisane przez

$a_1(z_1 \ldots z_k), \ldots, a_k(z_1 \ldots z_k)$ - elementarne funkcje symetryczne

z-współrzędnych punktów $p_1, \ldots, p_k$.

Dla $P = (\underbrace{p_1 \ldots p_1}_{k_1 x}, \underbrace{p_2 \ldots p_2}_{k_2 x}, \ldots) \in S^d\Sigma$ budujemy j.w. map na

$S^{k_1}\Sigma$ w $(\underbrace{p_1 \ldots p_1}_{k_1})$, $S^{k_2}\Sigma$ w $(\underbrace{p_2 \ldots p_2}_{k_2 x})$ etc

i bierzemy wsp. produktowe na $S^d\Sigma$.

$\mu : S^d\Sigma \to \mathbb{C}^g/\Lambda$ definiujemy tak: wybieramy $p_0 \in \Sigma$ i

$\mu((p_1 \ldots p_d)) := \mu(p_1 - p_0 + \ldots + p_d - p_0)$

Jest to holomorficzne* odwzorowanie zwartych zespolonych rozmaitości.

Abel: liniowo równoważne dywizory mają ten sam obraz.

$p_1 + \ldots + p_d \overset{f}{\sim} q_1 + \ldots + q_d$

$$\mu(p_1 + \ldots + p_d)_s = \sum \int_{p_0}^{p_i} \omega_s \underset{\text{mod } \Lambda}{=} \int_{p_0}^{q_i} \omega_s + \int_{q_i}^{p_i} \omega_s = \mu(q_1 + \ldots + q_d)_s + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\mu((f))_s}$$

Ustalmy $P = p_1 + \ldots + p_d \in S^d\Sigma$; niech $\Sigma' = \Sigma \setminus \{p_0, p_1 \ldots p_d\}$. Niech $\omega_1 \in H^{1,0}$, $\omega_1 \neq 0$.

Dobieramy $x_1 \in \Sigma'$ tże $\omega_1(x_1) \neq 0$. Niech $H_1 := \{\omega \in H^{1,0} \mid \omega(x_1) = 0\}$;

~~weźmy~~ $\dim H_1 = \dim H^{1,0} - 1$. Weźmy niezerowe $\omega_2 \in H_1$, $x_2 \in \Sigma'$ tże $\omega_2(x_2) \neq 0$.

$H_2 = \{\omega \in H_1^{1,0} \mid \cancel{\omega(x_1) =} \omega(x_2) = 0\}$; $\dim H_2 = \dim H_1 - 1$, $\omega_3 \in H_2 \setminus \{0\}$ etc.

$\omega_1 \ldots \omega_g$ - baza $H^{1,0}$

$x_1 \ldots x_g$ - pkty tże $\omega_i(x_i) \neq 0$, $\omega_i(x_j) = 0$ dla $j < i$.

[~~Dobieramy też $y \in \Sigma' \setminus \{x_1 \ldots x_g\}$~~]

Niech $D = -2x_1 - 2x_2 - \dots - 2x_g + p_1 + p_2 + \dots + p_d$ (A]6)

Dla dywizorów dużego stopnia, w szczególności dla D ($\deg D > 10g - 2g$)

zachodzi $h^0(D) = \deg D - g + 1$:

$$H^0(D) \subsetneq H^0(x_i + D)$$

$$\not\ni \quad \ni$$

$$g_i \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x_i) = 0,\ g_i'(x_i) \neq 0,\ g_i(x_j) = g_i'(x_j) = 0$$

dla $j \neq i$

$f := \sum g_i$ ma pojedyncze zera w x_i,

a bieguny jedynie w $p_1, \dots, p_d$

$\rightsquigarrow \underbrace{(f) + p_1 + \dots + p_d}_{Q} = x_1 + x_2 + \dots + x_g + (\text{inne punkty})$ i jest efektywny

A więc: $\mu(p_1 + \dots + p_d) = \mu(Q)$

Pochodna μ w Q: z_j - wsp. w x_j, wsp w $\mathbb{C}^g$ od $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_g$

wtedy, w z_j: ~~$\omega_j = \alpha_j(z_i) dz_i$, $\alpha_j(0_i) = 0$ dla~~

$\omega_i = \alpha_i(z_j) dz_j$, $\alpha_i(0_j) = 0$ dla $j < i$

$$\begin{array}{c} D\mu_Q = \begin{pmatrix} \alpha_1(0_1) & \alpha_1(0_2) & \cdots \\ \alpha_2(0_1) & \alpha_2(0_2) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_g(0_1) & \cdots & \alpha_g(0_g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \neq 0 & & * \\ & \neq 0 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \neq 0 \end{pmatrix} \\ \quad z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_g \quad \dots \qquad\qquad \text{epi} \uparrow \end{array}$$

Wniosek: obraz μ jest otwarty! – ale jest i zwarty, zatem μ jest na $\square$