

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Krywe eliptyczne

1) Cechy eliptyczne:

zasada zachowania energii dla wahadła:



$$\dot{\theta}^2 - \cos \theta = E$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \sqrt{E + \cos \theta}, \quad dt = \frac{d\theta}{\sqrt{E + \cos \theta}}$$

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{E + \cos \theta}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(E+z)(1-z^2)}} = \int \frac{dz}{f(z)} \quad \begin{matrix} z = \cos \theta \\ dz = -\sin \theta d\theta, \sin \theta = \sqrt{1-z^2} \end{matrix}$$

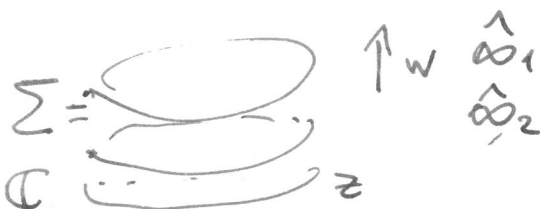
2) $\sum$ - powierzchnia Riemanna $w^2 = f(z) = (z-z_1) \dots (z-z_n)$ $z_i \neq z_j$
na Σ : $2w dw = f'(z) dz$

$$2 \frac{dw}{f'(z)} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \alpha \in H^{1,0}(\Sigma) \quad \left| \frac{dz}{w} = \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right.$$

na sens w punktach Σ

gdzie $w=0$. ($i \neq 0$)

3) $\sum$ - pow. Riemanna ramiona: $\hat{\omega}_i$
 $2|n$:



17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

* 2/n: wsp. w ∞ to $z = \frac{1}{y^2}$ $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_0$

$$w = \sqrt{f(z)} = \sqrt{f\left(\frac{1}{y^2}\right)} = y^{-n} \sqrt{1 + a_1 y^2 + \dots + a_0 y^{2n}}$$

dobrze określony dla $y \neq 0$.

$$\frac{dz}{w} = (-2y^{-3} dy) \left(\frac{y^n}{\sqrt{1 + \dots}} \right) = \frac{-2}{\sqrt{1 + \dots}} y^{n-3} dy$$

$\Rightarrow \frac{dz}{w} \propto$ jest mero w ∞ :

- $n=1$ - biegun reszki 2
- $n=3$ - holo, $\neq 0$ w ∞
- $n>3$ - holo, zero reszki $n-3$.

(2/n: podobnie, $n=4$ - holo i $\neq 0$ w ∞_1, ∞_2 .)

4) $n=3, 4$:

TW Σ - zwarta p. Riemanna, $\alpha \in H^{1,0}(\Sigma)$ bez zer,

Wtedy istnieje krotka $\lambda = \sum_{v,w \in Kuz} \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w \subset \Phi$, to oraz

holomorfia $\iota: \Phi/\lambda \rightarrow \Sigma$, t.j.

$$\begin{array}{c} (\mathbb{C}_*) \xrightarrow{\pi} \Phi/\lambda \xrightarrow{\iota} \Sigma \\ \pi^* \iota^* \alpha = du \longleftarrow \alpha \end{array}$$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

$\frac{D-d}{(x, [0,3])} \quad \tilde{\Sigma} - \text{nakładanie uniwersale } \Sigma = \{(x, [x]) \mid x \in \Sigma, \sigma\text{-droga z } x_0 \text{ do } x\}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad \Sigma$
 $[] : \sim \text{rel końca}$

$p^*(\alpha) \in H^{1,0}(\tilde{\Sigma})$, bez zer.
 $F: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}, F(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} p^*\alpha$
 $\tilde{\Sigma}$ jednocypie - całka nie zależy od drogi

F jest lokalnym homeomorfizmem, $dF = p^*\alpha / F^*du = p^*\alpha$

~~L $\Rightarrow$ TW~~: F jest nakładaniem
 Lemat:

$L \Rightarrow TW$: $F: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ biholo, bo $\mathbb{C}$ -jednocypie.

$\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma} / \pi_1 \Sigma = \mathbb{C} / \pi_1 \Sigma$, gdzie $\pi_1 \Sigma$ działa na $\mathbb{C}$ przez automorfizmy, $\pi_1 \Sigma \subseteq \text{Aut } \mathbb{C}$

$\text{Aut } \mathbb{C} = \{az + b\}$

p. nakładające nie ma punktów stałych - $a \neq 1 \Rightarrow \exists z_0 : az_0 + b = z_0$
 $(z_0 = \frac{b}{a-1})$

wiec $\pi_1 \Sigma \subseteq \{z \mapsto z + b \mid b \in \mathbb{C}\}$

"
 $\Lambda = \mathbb{Z}b$ lub $\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ (inaczej $\tilde{\Sigma}/\Lambda$ nie jest T_2)

$\mathbb{C}/\mathbb{Z}b \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\mathbb{C}/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w \cong T^2 = S^1 \times S^1$
 hodo

$z \mapsto e^{2\pi i(\frac{z}{b})}$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Konstrukcja: $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\psi} \Sigma$

dla $w^2 = f(z)$:

$$(w, z): \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{C}^2, \quad w(u)^2 = f(z(u))$$

meromorphic

$$du = (w, z)^* \left(\frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right)$$

na $\mathbb{C}/\Lambda$

P-d Lemata:

Poonen

α -wsp na $\mathbb{C}$ / lokalnie na $\mathbb{C}/\Lambda$

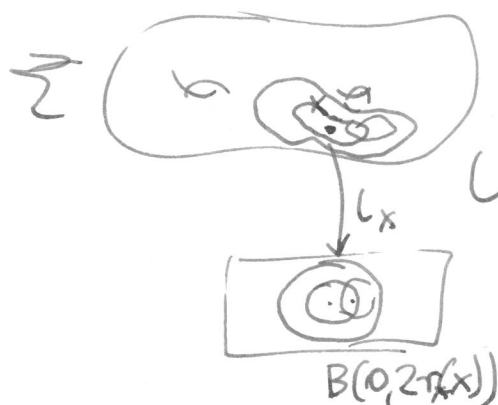
$$x \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \quad x \in \Sigma, L_x: B(x) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \sum \alpha$$

$$x(x) \neq 0 \Rightarrow L_x \text{ lokalnie na odwróte } j_x: B(0, r) \hookrightarrow X$$

$$0 \mapsto x$$

Teraz: r można wybrać jedno dla całego Σ . $j_x^* \alpha = du$



$$U_x = L_x^{-1}(B(0, r(x)))$$

dla $y \in B(0, r(x))$ ↓
pasuje $r = r(x)$

z pokryciem $(U_x | x \in \Sigma)$ wybieramy skończony $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N}$; $r := \min r(x_i)$

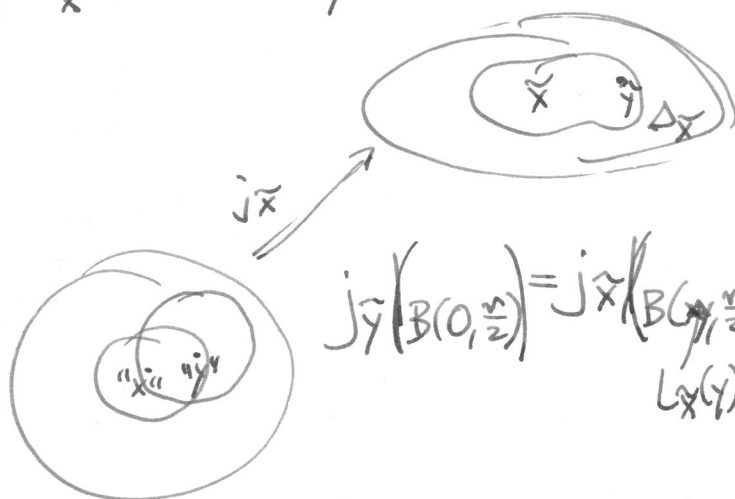
□ (PL)

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Podherst $\Rightarrow$ Lemat

Dla $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$ podać j_x do $j_x: B(0, r) \rightarrow \tilde{\Sigma}$
 $0 \mapsto \tilde{x}$
 $B(0, r/2) \mapsto \Delta_{\tilde{x}}$

• $\tilde{y} \in \Delta_{\tilde{x}} \Leftrightarrow \tilde{x} \in \Delta_{\tilde{y}}$



$$j_y(B(0, \frac{r}{2})) = j_x(B(0, \frac{r}{2})) \cap L_x(y)$$

Niech $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{y} \in F^{-1}(B(z, \frac{r}{2}))$. Wtedy $z \in B(F(\tilde{y}), \frac{r}{2})$,

wsc $\exists \tilde{x} \in \Delta_{\tilde{y}}$ t.j. $F(\tilde{x}) = z$

Ale też $\tilde{y} \in \Delta_{\tilde{x}}$ - wsc $F^{-1}(B(z, \frac{r}{2})) = \bigcup_{\tilde{x} \in F^{-1}(z)} \Delta_{\tilde{x}}$

$\left[\Delta_{\tilde{x}_1} \cap \Delta_{\tilde{x}_2} \ni \tilde{y} \Rightarrow \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \Delta_{\tilde{y}}, \text{ ale } F|_{\Delta_{\tilde{y}}} \text{ jest 1-1, } \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rightarrow z - \text{sprzecz.} \right]$

□

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

5) Weierstrass - funkcja $\wp$:

Λ -krota $\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$
 $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(u-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Przy ustalonej u , dla $\lambda \rightarrow \infty$: $\frac{1}{(u-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$
 -zbieżne!

$\wp$ jest Λ -okresową funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$.

$$\wp(u) = \wp(-u)$$

rozwiniecie Laurent'a w 0 : (parzyste potęgi u)

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 0 + au^2 + bu^4 + \dots$$

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + 2a + \dots$$

$$\wp'' - 6\wp^2 = -10a + \dots \quad \text{holomorficzna, } \Lambda\text{-okresowa} \Rightarrow \text{stała!}$$

$$\wp'' - 6\wp^2 + 10a = 0 \quad / \cdot 2\wp'$$

$$2\wp'\wp'' - 12\wp^2\wp' + 10a\wp' = 0$$

$$\frac{d}{du}((\wp')^2 - 4\wp^3 + 10a\wp) = 0$$

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

stała,
 g_2, g_3 zależą od Λ

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Wn

Φ/λ to pow. Riemannne równi: $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$

$$(w, z) = (\wp'(u), \wp(u))$$

Wahadło: $\theta = \cos^{-1}(\wp_1(t+t_0))$ $t = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \int_{z_0}^z \alpha = u$

$t = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \int \alpha$ $z = \wp_1(u) = \wp_1(t+t_0)$

$\cos \theta$

6) Uwaga: Funkcja meromorficzna λ -okresowa ma tyle same zer co : biegunk w $\square(v, w) + z_0$

$$\# \text{zer} - \# \text{biegunów} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \square} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

$\uparrow$
okresowość

$\wp$ ma 2 zera lub podwójne zero;

$\wp'$ ma potrójny biegun $\rightarrow$ 3 zera

$\wp'$ nieparzysta $\Rightarrow$ ma zera w $\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}(v+w)$:

$$\wp'(\frac{1}{2}v) = -\wp'(-\frac{1}{2}v) \stackrel{\text{okr}}{=} -\wp'(\frac{1}{2}v) \Rightarrow \text{niep}$$

$\uparrow$
okr

$\wp'$ ma pojedyncze zera, w nich $\wp'' \neq 0$ - zatem

$u \mapsto (\wp'(u), \wp(u))$ jest na wszydkie niezerową pochodną.

$$[\hat{a}_r : w \rightarrow \text{toż} \text{ } \alpha r]$$

$n=0$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

$\mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \Sigma$
 $u \mapsto (\mathcal{P}(u), \mathcal{Q}(u))$ jest lokalnym homeo,

wieści nakładaniem - bo $\mathbb{C}/\Lambda$ zwata:

$\left[\begin{array}{l} \mathbb{C}/\Lambda \\ \downarrow \pi \\ \Sigma \ni x \text{ gdyby nie miał otoczenia punktu tego:} \\ x \in B(x, \frac{1}{n}), \tilde{x}_n \in \pi^{-1}(B(x, \frac{1}{n})) \text{ ale nie leży w kopii płaskiej} \\ \tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x} \text{ (zwata)}, \text{ na otoczeniu } \tilde{x} \text{ } \pi \text{ homeo } \downarrow \end{array} \right]$

w ∞ widoczne, że to nakładanie 1-1, czyli $\mathbb{C}/\Lambda$ biholomorfizm.

7) Wartości $\mathcal{Q}$ w $\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}(v+w)$ różne

(inaczej $\mathcal{Q}$ -const miałyby > 2 zera, a $\# \text{bieg} = 2$)

$\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{C}$ jest 2-krotnym nakładaniem, rozg. w 4 punktach, w tym w ∞ .

$$(AB|CD) = \frac{A-C}{B-C} : \frac{A-D}{B-D}$$

4 punkty w $\mathbb{C} \xrightarrow{\frac{az+b}{cz+d}} \begin{pmatrix} 0, 1, \infty, \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \text{długości } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$
 $\begin{pmatrix} \lambda, 1, 0, \infty \end{pmatrix} \rightarrow \text{długości } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

Rozwiązanie w nakładaniu $\mathbb{C}$ z parą punktów rozgałęziających $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Lemat $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, λ -okresowa, bez zer/biegów na brzegu

$$\square = z_0 + \square(v, w). \text{ Wtedy}$$

$$\sum_{a \in \mathbb{P}} \text{ord}_a(f) = 0, \quad \sum_{a \in \mathbb{P}} a \cdot \text{ord}_a(f) \in \mathbb{Z}$$

D-d:

$$\sum \text{ord}_a(f) = \# \text{zer}(f) - \# \text{bieg}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \stackrel{\text{dres.}}{=} 0$$

$$\sum a \cdot \text{ord}_a(f) \stackrel{?}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} + \int_{\square} + \dots = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\square} - \int_{\square} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} \underbrace{z - (z+w)}_{\square} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots = \frac{w}{2\pi i} \int_{\square} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = w \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

D

drugi schemat podobnie

$$w^2 = f(z)$$

$$h(u+1) = (\sigma'(u), \sigma(u)) \quad \text{krzyż z pasty} \quad \begin{matrix} w = \lambda z + \mu \\ w = az + b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{składowy } u: \sigma'(u) - a\sigma(u) - b = 0$$

λ -okresowa, z 3-biegunem w 0, więc ma 3 zera u_1, u_2, u_3

$$\text{z Lematu: } u_1 + u_2 + u_3 - 3 \cdot 0 \in \mathbb{Z}; \quad w \in \mathbb{D}/\Lambda: u_3 = -(u_1 + u_2)$$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Def Definiujemy w Σ dodawanie: ∞ to elem O ,

$$P_1 + P_2 + P_3 = O \Leftrightarrow P_1, P_2, P_3 \text{ współliniowe.}$$

$h: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \Sigma$ jest izomorfizmem grup.

Odwrótość:

$$\text{na } \Sigma: -(w, z) = (-w, z)$$

(na prostej $z = \text{const}$)

w $\mathbb{C}/\Lambda$:

$$-u = -u$$

$$(\mathcal{P}'(-u), \mathcal{P}(-u)) = (-\mathcal{P}'(u), \mathcal{P}(u))$$

niep. parz.

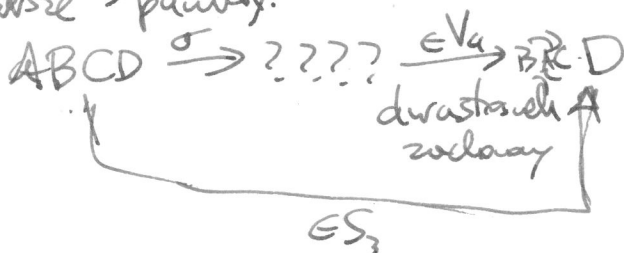
17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

Bez porządku: permutacje działają na oświadczeniach w $\mathbb{C}$

Permutacje $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ zachowują dwustronność.

$\frac{A-C}{B-C} \cdot \frac{B-D}{A-D}$ owe tożsamości to V_4 grup Kleina działająca na oświadczeniach tranzytywnie

znaczy dwustronnie zobaczmy patrzeć na S_3 permutacje pierwszorzędne 3 punkty.



Zamiast $0, 1, \infty$ można brać $1, \rho, \rho^2$ $\rho = e^{2\pi i/3}$



wtedy permutacje są generowane przez cykl $z \mapsto \rho z$ oraz transpozycję $z \mapsto \bar{z}$ działające na $\mathbb{C}$

$$h(z) = z^3 + \bar{z}^3;$$

Fakt z_1, z_2 są S_3 -równoważne $\Leftrightarrow h(z_1) = h(z_2)$ (h jest 6-1)

$G(z) = \frac{1}{27(h(z)-2)}$ jest wygodniejsze, też spełnia for.

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \rho, \rho^2\} \rightarrow G(z) \in \mathbb{C},$$

$$0, 1, \infty \rightarrow 1, \rho^2, \rho : z \mapsto \frac{\rho z + \rho^2}{z + \rho^2}, F(\lambda) = G\left(\frac{\rho z + \rho^2}{z + \rho^2}\right)$$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ są w tej samej orbicie S_2 permutacyjnego $(0, 1, \infty)$

$$\Leftrightarrow F(\lambda_1) = F(\lambda_2)$$

Rachunek: $F(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}$

Nierozkładanie poirachni $\mathbb{C}/\lambda$:

- wybrać $\mathcal{F}_\lambda : \mathbb{C}/\lambda \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow$ wyznaczenie (z_1, z_2, z_3, z_4)
- policz dwustronnie $\lambda = (z_1 : z_2 : z_3 : z_4)$
- policz $F(\lambda)$.

Realizacja $\mathbb{C}/\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ jako wyrażenia naleyca jest z dodatkowosci do autowfow $\mathbb{C}$ jedyna i $\mathbb{C}/\lambda$ jedyna

$f, g : \mathbb{C}/\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ dwie takie $\Rightarrow$ bro: punkt wyznaczenia $\rightarrow \infty$ realizoway w 0

$\Rightarrow f, g$ najis podwójny bignu w 0

$f - \frac{f(0)}{g(0)}g$ - holo, nie const.

$f = cg + c'$

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$$

$$\mathbb{H} \ni \tau \mapsto \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \Lambda_\tau \mapsto \mathbb{C}/\Lambda_\tau \rightarrow 4 \text{ punkty wyznaczone:}$$

$$\left(\mathcal{O}_{\Lambda_\tau} \left(\frac{1}{2} \right), \mathcal{O}_{\Lambda_\tau} \left(\frac{\tau}{2} \right), \mathcal{O}_{\Lambda_\tau} \left(\frac{1+\tau}{2} \right), \infty \right)$$

$$\rightarrow \text{dwustosunek tej czwórki: } \lambda(\tau) \leftrightarrow F(\tau)$$

$$\text{holomorficzne funkcje } \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

$$\text{Level theory: } {}_2E = \mathbb{Z}\text{-torsja w } E; \quad {}_2E(\tau) = \{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\}$$

w ${}_2E$ można wybrać bazę, tzn. 2 niezerowe elementy

Kiedy $SL_2\mathbb{Z}$ -równoważność zachowuje bazę?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : 1, \tau \rightarrow a+b\tau, c+d\tau$$

$$\frac{1}{2} \mapsto \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\tau \equiv \frac{1}{2} \text{ iff } 2 \nmid a, 2 \mid b$$

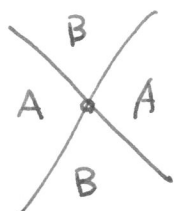
$$\frac{\tau}{2} \mapsto \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\tau \equiv \frac{\tau}{2} \text{ iff } 2 \mid c, 2 \nmid d$$

$$: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}$$

grupa $\Gamma(2)$

Fakt $\Gamma(2)$ jest generowane przez $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i jest redukcja.

Ping-pong :



$$A = \{ |x| > |y| \}$$

$$B = \{ |y| > |x| \}$$

$\overset{a}{a}$

$$a^k : B \rightarrow A$$

$$b^k : A \rightarrow B$$

$(k \neq 0) \Rightarrow \text{wolna}$