Σ - powierzchnia Riemanna

- zespolona przestrzeń kostyczna / zespolone formy:

$$T_p^*\Sigma \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, \mathbb{R})$$

$$T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, \mathbb{C})$$

$$f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{C}) \rightsquigarrow (df)_p \in T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}}$$

Np. lokalnie: $d(x+iy) = dx + i\,dy =: dz$

$\Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ - gładkie cięcia $T^*\Sigma^{\mathbb{C}} = \bigcup_p T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}}$

sprzężenie: $\omega \longmapsto \overline{\omega}$ $\qquad \overline{\omega}(v) = \overline{\omega(v)}$

$\overline{df + i\,dg} = df - i\,dg \quad f, g \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$

- Zespolona struktura na rzeczywistej p.l. V: $\mathbb{R}$-liniowe $J : V \to V$, $J^2 = -\mathrm{Id}$.

$(V, J) \rightsquigarrow$ zesp. p.l.: $(a+bi)v := av + bJv$.

Na $T_p\Sigma$ jest struktura zespolona, t.że $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ jest holo w p $\iff df_p : (T_p\Sigma, J) \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowa.

w mapie: $J[\gamma]_p = [p + i(\gamma - p)]_p$ $\boxed{2}$

<u>Fakt</u> (V, J) j.w., $A : V \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-liniowe. A zapisuje się jednoznacznie jako suma odwzorowania $\mathbb{C}$-liniowego $(F(Jv) = iF(v))$ i $\mathbb{C}$-antyliniowego $(F(Jv) = -iF(v))$

<u>D-d</u>: $A'(v) = \frac{1}{2}(A(v) - iA(Jv))$, $A''(v) = \frac{1}{2}(A(v) + iA(Jv))$ $\square$

ten rozkład daje rozkłady

$$T_p^*\Sigma^{\mathbb{C}} = T_p^*\Sigma' \oplus T_p^*\Sigma'' \rightsquigarrow \Omega^1_{\mathbb{C}} = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$$

ℂ2

Rozkład d:
$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^2 \\ \bar\partial \uparrow & & \uparrow \bar\partial \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0} \end{array}$$

- we wsp. $z = x+iy$: $\underset{T_p^*\Sigma'}{\overset{\cap}{dz}} = dx + i dy$, $\underset{T_p^*\Sigma''}{\overset{\cap}{d\bar z}} = dx - i dy$

$\alpha\, dz \in \Omega^{1,0}$, $\beta\, d\bar z \in \Omega^{0,1}$. $(\alpha, \beta : \Sigma \to \mathbb{C})$

Dla $f : \Sigma \to \mathbb{C}$:
$$df = f_x dx + f_y dy = f_x \frac{dz + d\bar z}{2} + f_y \frac{dz - d\bar z}{2i} =$$
$$= \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}(f_x - i f_y)}_{f_z,\ \frac{\partial f}{\partial z}} dz}_{\partial f} + \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}(f_x + i f_y)}_{f_{\bar z},\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}} d\bar z}_{\bar\partial f}$$

CR: $\bar\partial f = 0$ - wtedy $df = \partial f = f'(z)\, dz$

- $\Omega^1 \to \Omega^2$
$$\partial(A\, d\bar z) = \frac{\partial A}{\partial z} dz\, d\bar z = -2i \frac{\partial A}{\partial z} dx\, dy \qquad dz\, d\bar z = -2i\, dx\, dy$$
$$\bar\partial(B\, dz) = \frac{\partial B}{\partial \bar z} d\bar z\, dz = +2i \frac{\partial B}{\partial \bar z} dx\, dy$$

[Z: Zgadza się z $\mathbb{R}$-wersją]

- <u>Def</u> Forma typu $(1,0)$ jest holomorficzna, jeśli jej $\bar\partial = 0$.
(lok.: $B\,dz$ z holo B)

- $S \subseteq \Sigma$ - podpowierzchnia zwarta z brzegiem, α - holo 1-forma.
wtedy $\int_{\partial S} \alpha = 0$ (Stokes/Cauchy).

ZAD:
Mero + Residua

- Laplasjan:

$\Delta = 2i\bar\partial\partial : \Omega^0 \to \Omega^2$ $\qquad d^2=0 \Rightarrow \bar\partial\partial = -\partial\bar\partial$

$\Delta f = 2i\,\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) f \underbrace{d\bar z dz}_{2i dx dy} = -(\partial_x^2+\partial_y^2) f\, dx dy$

- f harmoniczne $\overset{df}{\Leftrightarrow} \Delta f = 0$

f holo $\Rightarrow$ Re f, Im f harmoniczne:

$\frac{1}{2i}\Delta(f \pm \bar f) = \bar\partial\partial(f\pm\bar f) = -\partial\bar\partial f \pm \bar\partial(\overline{\bar\partial f}) = 0$

- Lokalnie: harmoniczne $\varphi = \mathrm{Re}\, f$, f holo

D-d: $A := i\bar\partial\varphi + \overline{i\bar\partial\varphi}$ rzeczywista 1-forma

$\bar\partial\partial\varphi = 0 \Rightarrow dA = 0 \underset{H^1 \mathbb{R}^2 = 0}{\Longrightarrow} A = d\psi = \underset{-i\overline{\partial\varphi}}{\partial\psi} + \underset{i\bar\partial\varphi}{\bar\partial\psi}$

$\bar\partial(\varphi + i\psi) = \bar\partial\varphi + i\bar\partial\psi = 0$ ↯

- $\Rightarrow$ zasada maksimum.

~~Rozkład Hodge'a~~ Kohomologie Dolbeault'a

$H^{1,0} := \ker(\bar\partial : \Omega^{1,0} \to \Omega^{1,1})$ $\qquad (= \{f dz \mid f \in \mathcal{O}\})$

$\Omega^2 = \Omega^{1,1}$

$\rightarrow$ $H^{0,1} := \mathrm{coker}(\bar\partial : \Omega^0 \to \Omega^{0,1})$

$H^{1,1} := \mathrm{coker}(\bar\partial : \Omega^{1,0} \to \Omega^{1,1})$

Cel Na zwartej powierzchni Riemanna istnieje niestała funkcja meromorficzna "d-d 1": konstruujemy f z pojedynczym biegunem w $p \in \Sigma$

$f\circ\varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$?

Niech $\beta \in C^\infty_c(\Sigma, \mathbb{R})$:

nośnik w U, 1 w otoczeniu p.

$\beta\cdot\frac{1}{z}$ jest funkcją na $\Sigma\setminus\{p\}$, mero w p, ale nie holo ~~na $\Sigma\setminus\{p\}$~~ na U.

⇝ poprawka: szukamy $g \in \Omega^0_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, że $g + \beta\frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\Sigma\setminus\{p\})$

$$\bar\partial\left(g+\beta\tfrac{1}{z}\right) = \bar\partial g + \bar\partial\beta\cdot\tfrac{1}{z} + \beta\cdot\underbrace{\bar\partial\tfrac{1}{z}}_{\overset{\shortparallel}{0}} \overset{?}{=} 0$$

$$\bar\partial g = -\tfrac{1}{z}\bar\partial\beta =: A \in \Omega^{0,1}$$

Jeśli $[A]=0$ w $H^{0,1}$, to g istnieje;

np jeśli $H^{0,1}(\Sigma) = 0$, to g istnieje.

"d-d 2" Jeśli $\dim H^{0,1}(\Sigma) = d < \infty$, to:

wybieramy $p_0, p_1, \dots, p_d \in \Sigma$,

$A_i = -\frac{1}{z_i}\bar\partial\beta_i$

$[A_i]$ lz w $H^{0,1}$:

$$\exists\lambda_i:\ \left[\sum_0^d \lambda_i A_i\right] = 0 \text{ w } H^{0,1},\quad (\lambda_i)\neq(0)$$

$$\exists g:\ \bar\partial g = \sum\lambda_i A_i$$

$g + \sum \beta_i\cdot\frac{1}{z_i}$ meromorficzna na Σ.

<u>TW</u> Jeśli $\dim H^{0,1}(\Sigma) < \infty$, to istnieje niestała funkcja meromorficzna na Σ.

$\langle\omega,\eta\rangle := \int \omega^{1,0}\wedge\eta^{0,1}$

Z:

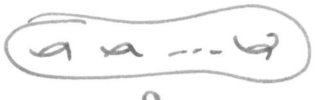
⇝ $f \in \mathcal{M}(T^2)$ bieg. w p, q

~~TW~~ fundamentalne. C5

Σ - zwarta powierzchnia Riemanna, $\rho \in \Omega^2(\Sigma)$

- równanie $\Delta f = \rho$ ma rozwiązanie $f \in \Omega^0(\Sigma) \iff \int_\Sigma \rho = 0$.
- jeśli rozwiązanie istnieje, to jest jedyne z dokł. do stałej addytywnej.

$\overset{P}{\text{TW}} \Longrightarrow \dim H^{0,1}(\Sigma) < \infty$

Uwaga: $\Sigma = \Sigma_g =$  g , $\dim H^1(\Sigma) = 2g$.

~~Lemat D-d~~

Lemat

1) $\sigma : H^{1,0} \to \overline{H^{0,1}}$, $\alpha \mapsto [\bar\alpha]$ jest izo

2) $B : H^{1,0} \times H^{0,1} \ni (\alpha, [\theta]) \mapsto \int \alpha \wedge \theta \in \mathbb{C}$ jest niezdegenerowaną formą 2-liniową ($\Rightarrow H^{1,0} \xrightarrow[B]{\simeq} (H^{0,1})^*$)

3) $H^{1,0} \times H^{0,1} \ni (\alpha, [\theta]) \mapsto \cancel{[\alpha + \theta] \in H^1}$ $\alpha + \overline{\sigma^{-1}([\theta])} \in H^1$ jest izo.

D-d

- σ jest na:

$\theta \in H^{0,1}$; szukamy $f \in \Omega^0$: $\overline{\theta + \bar\partial f} \in H^{1,0}$

$0 = \bar\partial\left(\overline{\theta + \bar\partial f}\right) = \overline{\partial(\theta + \bar\partial f)}$, $\partial\theta = -\partial\bar\partial f = \frac{1}{2i}\Delta f$

ale $\int_\Sigma \partial\theta = \int_\Sigma d\theta \underset{\text{stokes}}{=} 0 \underset{\boxed{\text{TW}}}{\Longrightarrow} \exists f : \Delta f = 2i\partial\theta$

- $B(\alpha, \sigma(\alpha)) = B(\alpha, [\bar\alpha]) = \int \alpha \wedge \bar\alpha$; lokalnie $f dz \wedge \bar f d\bar z = -2i|f|^2 dx\,dy$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2i} B(\alpha, \sigma(\alpha)) > 0$; • $H^{1,0} \xhookrightarrow{B} (H^{0,1})^*$

- σ 1-1 ($\alpha \neq 0 \Rightarrow B(\alpha, \sigma(\alpha)) \neq 0 \Rightarrow \sigma(\alpha) \neq 0$)

- B niezdeg. w 2 zmiennej: $[\theta] \neq 0 \Rightarrow [\theta] = [\bar\beta]$, β hol $\Rightarrow B(\beta, [\bar\beta]) = \int \beta \wedge \bar\beta \neq 0$.

• 3) jest 1-1:

Niech $\alpha, \beta \in H^{1,0}$, $(\alpha, \overset{\sigma(\beta)}{\overset{\parallel}{[\overline{\beta}]}}) \mapsto 0$

$$\alpha + \overline{\beta} = 0 \text{ w } H^1$$

$$\alpha + \overline{\beta} = df = \partial f + \overline{\partial} f$$

$$\Omega^{1,0} \ni \underset{0}{\underset{\parallel}{\alpha - \partial f}} = \underset{0}{\underset{\parallel}{\overline{\partial} f - \overline{\beta}}} \in \Omega^{0,1}$$

$$\alpha = \partial f, \ \beta = \partial \overline{f}$$

$$0 = \overline{\partial}\alpha = \overline{\partial}\partial f \underset{\boxed{JW}}{\Longrightarrow} f = \text{const} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

[to już dowodzi, że $H^{1,0} \oplus H^{0,1} \xhookrightarrow{3)} \underset{\dim 2g}{H^1}$, i $\dim H^{0,1} \leq g$]

• 3) epi: Niech $[\omega] \in H^1$, $\omega = \omega^{1,0} + \omega^{0,1}$

$$0 = d\omega = \overline{\partial}\omega^{1,0} + \partial\omega^{0,1}$$

$$0 = \overline{\partial}\omega^{1,0} + \partial\overline{\partial} f$$

$$= \overline{\partial}(\omega^{1,0} - \partial f)$$

| $\omega^{0,1} = \overline{\beta} + \overline{\partial} f$, $\overline{\partial}\beta = 0$, $\partial\overline{\beta} = 0$

$$[\omega]_{H^1} = [\omega - df]_{H^1} = [(\omega^{1,0} - \partial f) + (\omega^{0,1} - \overline{\partial} f)] \xleftarrow{3)} (\omega^{1,0} - \partial f, [\overline{\beta}])$$

[~~B niezdegenerowana~~ też w ~~drugim argumencie:~~
~~$[\theta] \neq 0 \Rightarrow [\theta] = [\overline{\beta}]$, β holo $\neq 0 \Rightarrow B(\beta, [\theta]) = \int_\Sigma \beta \wedge \overline{\beta} \neq 0$~~.]

• Konkluzja: $\dim H^{1,0} = \dim H^{0,1}$ (z B), w sumie $2g$ (z 3))

zatem $\dim H^{1,0} = \dim H^{0,1} = g$. $\square$

Wnioski

- Σ_g – powierzchnia zwarta genusu g

  $p_0,\dots,p_g\in\Sigma_g$ $(g+1)$ punktów.

  $\Rightarrow \exists\ f\in\mathcal{M}(\Sigma_g)$, niestała, o pojedynczych biegunach w podzbiorze $\{p_0,\dots,p_g\}$.

- na Σ_1 istnieje ~~nieznikająca~~ forma holomorficzna $\neq 0$ w każdym punkcie.

- $\Sigma_0\simeq\overline{\mathbb{C}}$

- Na Σ_1 istnieje funkcja meromorficzna o dokładnie dwóch ~~pojedynczych~~ jednokrotnych biegunach.

TW Riemann-Roch (wersja 1)

Niech $D=\{p_1,\dots,p_d\}\subseteq\Sigma_g$.

$$h^0(D)=\dim\underbrace{\{f\in\mathcal{M}(\Sigma_g)\mid f\in\mathcal{O}(\Sigma\setminus D),\ \operatorname{ord}_{p_i}(f)\geq -1\}}_{}\quad \dim H^0(D)$$

$$h^1(D)=\dim\{\omega\in H^{1,0}(\Sigma_g)\mid \omega(p_i)=0\}=\dim H^1(D)$$

Wtedy

$$h^0(D)-h^1(D)=d-g+1$$

$d\geq g+1$
$\Downarrow$
$h^0(D)\geq g+1-g+1=2$
$\Rightarrow\exists$ niestała f j.w.

D-d:

Residuum funkcji $f\in\mathcal{M}(\Sigma)$ w biegunie jednokrotnym:

$f(z)=a_{-1}z^{-1}+a_0+a_1z+\dots$ ($z=0$ - biegun) odp. $p\in\Sigma$)

$\rightsquigarrow a_{-1}\frac{\partial}{\partial z}\in T_p\Sigma'$ | zad: dobrze określone.

$$R: H^0(D)\longrightarrow\bigoplus_i T_{p_i}\Sigma'$$

$\ker R=\mathcal{O}(\Sigma)=\mathbb{C}$ (stałe funkcje) ustalmy wsp z_i wokół p_i, $\beta_i = \beta(z_i)$  (C8)

$$R: H^0(D) \ni f \longmapsto (\mathrm{Res}_0 f dz_i) \in \bigoplus_i \mathbb{C} =: \mathbb{C}^d$$

$$A: \mathbb{C}^d \ni (s_i) \longmapsto \sum s_i \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_i} \in H^{0,1}(\Sigma)$$

$\ker A = \mathrm{Im} R$:

$$\left[\begin{array}{l} \sum s_i \bar\partial\beta_i \frac{1}{z_i} = 0 \text{ w } H^{01} \Leftrightarrow \exists g \sum s_i \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_i} = \bar\partial g \\ \qquad H^0(D) \ni \sum s_i \beta_i \frac{1}{z_i} - g \overset{R}{\longmapsto} (s_i) \in \mathbb{C}^d \end{array}\right]$$

odwrotnie: $(s_i) \in \mathrm{Im} R$
$\Rightarrow \exists f : \mathrm{Res}\, f dz_i = s_i$
$f = \sum s_i \beta_i \frac{1}{z_i} + g,\ g \in \Omega^0$
$\bar\partial(-g) = \sum s_i \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_0}$

$$0 \to \underset{\text{const}}{\mathbb{C}} \to H^0(D) \xrightarrow{R} \mathbb{C}^d \xrightarrow{A} H^{0,1}$$

$$\dim \ker A = \dim \mathbb{C}^d - \dim H^{0,1} + \dim \ker A^*$$

$\dim \ker A = \dim \mathrm{Im} R = \dim H^0(D) - 1 = h^0(D) - 1$, $\dim \mathbb{C}^d = d$, $\dim H^{0,1} = g$, $\dim \ker A^* = ?$

$$A^*(\alpha)(s_i) = B(\alpha, A(s_i)) = B\left(\alpha, \sum s_i \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_i}\right) =$$

$$= \int_\Sigma \alpha \wedge \sum s_i \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_i} = \sum_i s_i \int_{B(0,1)} \alpha_i dz_i \wedge \bar\partial \beta_i \frac{1}{z_i} = \sum_i s_i \int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{\alpha_i}{z_i} dz_i$$

- nośnik w annulusie
- $= d\left(\beta_i \frac{1}{z_i} \alpha_i dz_i\right)$ (poza 0)

$$= \sum s_i \cdot 2\pi i \cdot \alpha_i(0)$$

$\alpha \in \ker A^* \Leftrightarrow \forall_i\ \alpha_i(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in H^1(D)$ $\square$

<u>Wn</u> Na Σ_1 $\exists$ forma holomorficzna $\neq 0$ w każdym punkcie.
$\dim H^{1,0}(\Sigma_1) = 1$ (=g). $\alpha \in H^{1,0}(\Sigma_1)$ niezerowa. Jeśli $\alpha(p) = 0$, to $D = p$:
$\underset{1}{h^0(D)} - \underset{0}{h^1(D)} = 1 - 1 + 1$, sprz. ($h^0(D) = 1$, bo inaczej $\Sigma \simeq \mathbb{C}$)

Strategia dowodu tw. fundamentalnego (jedyności: $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \rho \Downarrow \Delta(f_1 - f_2) = 0 \Downarrow f_1 - f_2$ const (zas. max)) C9

Iloczyn skalarny Dirichleta na $\Omega^0(\Sigma)/\mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle_D = \langle df, dg \rangle := \cancel{\mathrm{Re}}\, i \int df^{1,0} \wedge dg^{0,1})$$

Heureza: jeśli $\Delta f = \rho$, to $\forall \psi \in C^\infty \Sigma$

$$\int \psi \rho = \int \psi \Delta f = \int \langle d\psi, df \rangle = \langle \psi, f \rangle_D$$

i odwrotnie: jeśli $\forall \psi \quad \int \psi \rho = \langle \psi, f \rangle_D$

to $\forall \psi \quad \int \psi (\rho - \Delta f) = 0$

$$\rho - \Delta f = 0$$

<u>Def</u> $\hat{\rho} : C^\infty \Sigma \to \mathbb{R}, \ \hat{\rho}(\psi) = \int \psi \rho$

Ten funkcjonał schodzi na $C^\infty \Sigma / \mathbb{R}$, bo $\hat{\rho}(1) = \int \rho = 0$.

<u>Lemat P</u> (Poincaré)

$\hat{\rho}$ jest ograniczony wzgl. $\|\cdot\|_D$; $\exists C \quad |\hat{\rho}(\psi)| \leq C \|\psi\|_D$

Lemat P $\Rightarrow \hat{\rho}$ rozszerza się do funkcjonału na H-uzupełnieniu

$C^\infty \Sigma / \mathbb{R}$ względem $\|\cdot\|_D$.

<u>Lemat R</u> (Riesz)

$\exists f \in H \quad \hat{\rho}(\psi) = \langle \psi, f \rangle_D$

<u>Lemat W</u> (Weyl)

$f \in C^\infty \Sigma$.

Udowodnimy P i W (R - standard analizy funkcjonalnej)