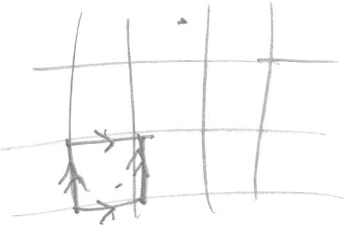
Powierzchnie hipereliptyczne : (K4)

$\Sigma = Z(y^2 - p(x))$, $p \in \mathbb{C}[x]$ ma pojedyncze pierwiastki

Ilorazy



$\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ - iloraz $\mathbb{C}$ przez podgrupę $\mathbb{Z}[i]$

$z \sim w \iff z - w \in \mathbb{Z}[i]$

Mapy: dla $z \in \mathbb{C}$ wybieramy $V_z = z + B(0, \frac{1}{2}) = B(z, \frac{1}{2})$

Odwzorowanie ilorazowe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ wkłada V_z na otw. podzbiór $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$

odwrotności takich włożeń dają kolekcję map.

Odwzorowania przejścia to translacje

Analogicznie dla krat: $\Lambda = \mathbb{Z}z_0 + \mathbb{Z}z_1$ - krata w $\mathbb{C}$

(z_1, z_2 $\mathbb{R}$-lnz), to $\mathbb{C}/\Lambda$ jest pow. Riemanna - torusem

Kiedy $\mathbb{C}/\Lambda$ i $\mathbb{C}/\Lambda'$ są takie same (biholomorficzne?)

Czy da się podobnie budować ilorazy $\mathbb{D}$?

Kiełki i kontynuacja analityczna

Def 1) Niech $z_0 \in \mathbb{C}$. Na parach (U, f), że $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$, wprowadzamy relację równoważności:

$$(U,f) \sim_{z_0} (V,g) \iff \exists \text{ otw } W \subseteq U \cap V,\ z_0 \in W, \text{ że } f|_W = g|_W .$$

Klasy równoważności tej relacji nazywamy kiełkami funkcji holomorficznej w z_0: $[(U,f)]_{\sim_{z_0}}$ to kiełek f w z_0. (ozn f_{z_0})

2) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ to przestrzeń wszystkich kiełków funkcji holomorficznych we wszystkich punktach $z_0 \in \mathbb{C}$.

3) Dla pary (U,f), $U \subseteq \mathbb{C}$ otw, $f \in \mathcal{O}(U)$ definiujemy (K5)

$$\mathcal{O}(U,f) := \{ [(U,f)]_{\sim_z} \mid z \in U \}$$

Definiujemy topologię w $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ deklarując ~~O~~ zbiory postaci

$\mathcal{O}(U,f)$ jako bazę zbiorów otwartych.

<u>Ćw</u> ta topologia jest Hausdorffa.

4) Jeśli U jest obszarem w $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$, to składowa spójna $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ zawierająca $\mathcal{O}(U,f)$ nazywamy powierzchnią Riemanna f: $\Sigma(f)$

5) (rzut $f_{z_0} \mapsto z_0$ jest lokalnym homeomorfizmem i pozwala określić mapy na $\Sigma(f)$; odwzorowanie $f_{z_0} \mapsto f(z_0)$ zadaje holomorficzną funkcję na $\Sigma(f)$.

<u>Uzwarcanie - $\mathbb{C}P^2$</u>

$p(x,y)$ - wielomian 2 zmiennych $\rightsquigarrow Z(p) \subseteq \mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{C}P^2 = \{ \ell < \mathbb{C}^3 \mid \dim \ell = 1 \} = \{ [x:y:z] \mid x,y,z \in \mathbb{C}, \text{nie wszystkie } 0 \}$

$[x:y:z]$ to klasa równoważności niezerowych trójek względem relacji
$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$
$x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z$

Włożenie:

$(x,y) \mapsto [x:y:1]$

Punkty poza tym $\mathbb{C}^2$: $[x:y:0]$

Są 3 kopie $\mathbb{C}^2$: $\{[x:y:1]\}$, $\{[1:y:z]\}$, $\{[x:1:z]\}$

każdy punkt $\mathbb{C}P^2$ leży co najmniej w jednej z nich $\mathbb{C}^2$

$$Z(p) = \{(x,y) : \underbrace{\sum a_{ij} x^i y^j}_{p(x,y)} = 0\} = \{[x:y:1] \mid \sum a_{ij} x^i y^j = 0\}$$

$$= \{[x:y:z] \mid z \neq 0 \text{ i } \sum a_{ij} \left(\frac{x}{z}\right)^i \left(\frac{y}{z}\right)^j = 0\} \quad \cdot z^d$$

$$= \{[x:y:z] \mid z \neq 0 \text{ i } \sum a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j} = 0\}$$

$\subseteq \{[x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \mid \sum a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j} = 0\}$ (K6)

homogenizacja $p(x,y)$

Pd $Z(y^2-x)$

$\rightsquigarrow$ wersja jednorodna: $y^2 - xz = 0$

w trzech kopiach $\mathbb{C}^2$:

$z=1$: $y^2 = x$

$y=1$: $xz = 1$

$y^2 = z$

w każdej kopii spełnione założenie faktu $\rightsquigarrow$ pow. Riemanna w $\mathbb{CP}^2$

nowe punkty: $z=0$, wtedy $y^2=0$ czyli $y=0$

$\to$ jeden punkt $[1:0:0]$ — w trzeciej kopii $(0,0)$ — OK.

ZAD bilolo z $\mathbb{C}$

Fakt (ZAD)

$p(x,y,z)$ — jednorodny wielomian stopnia $d \geq 1$. Załóżmy, że $p_x = p_y = p_z = 0$ tylko dla $x=y=z=0$. Wtedy $Z(p)$ określa powierzchnię Riemanna w $\mathbb{CP}^2$.

Pd $y^2 - p(x)$ $(\deg p = d \geq 3)$

$\rightsquigarrow$

$y^2 z^{d-2} - \sum a_k x^k z^{d-k}$

$[0:1:0] \in Z(p)$

$\downarrow y=1$

$(0,0)$ na $z^{d-2} - \sum a_k x^k z^{d-k} = q(x,z)$

w $(0,0)$ $q_x = q_z = 0$.

Niech $p(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ będzie nierozkładalny ($i \neq ax+b$) K7

$$p(x,y)=a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\dots+a_{n-1}(x)y+a_n(x),\quad a_k(x)\in\mathbb{C}[x]$$

Zbiór $S_1=\{x\in\mathbb{C}\mid \exists y\ \ p(x,y)=p_y(x,y)=0\}$ jest skończony

Podobnie $S_0=\{x\in\mathbb{C}\mid a_0(x)=0\}$ jest skończony.

Niech $S=S_0\cup S_1\cup\{\infty\}$; S jest skończonym podzbiorem $\overline{\mathbb{C}}$.

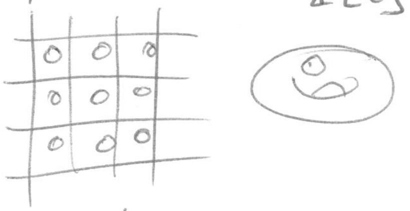
$\pi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, $(x,y)\mapsto x$

$Reg := Z(p)\cap\pi^{-1}(\overline{\mathbb{C}}\setminus S)$

Fakt $\pi: Reg\to \mathbb{C}\setminus S$ jest n-krotnym nakryciem

Def $\pi:X\to Y$ jest nakryciem, jeśli każdy $y\in Y$ ma otoczenie otw. U prawidłowo nakryte, tj takie że $\pi^{-1}(U)=\bigsqcup_\alpha U_\alpha$, $\pi|_{U_\alpha}:U_\alpha\to U$ jest homeo dla każdego α.

Pdy: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$



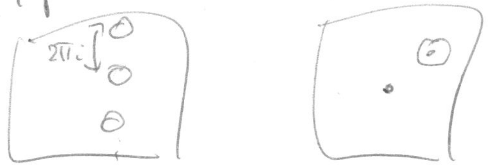
$\mathbb{R}\to S^1$

$x\mapsto e^{2\pi i x}$

$S^1\to S^1$

$z\mapsto z^k$

$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$



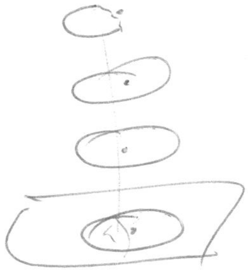
$B(0,r^{1/k})\setminus\{0\}\to B(0,r)\setminus\{0\}$

$z\longmapsto z^k$

Lemat ~~Fakt~~: każde skończone nakrycie $B(0,r)\setminus\{0\}$ jest tej postaci dla pewnego k.

$\pi:\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ jest lokalnym homeo, ale nie jest nakryciem, np.

$\pi^{-1}(B(0,\epsilon))$ ma składową $\{(\frac{1}{z})_w \mid w\in B(0,\epsilon)\setminus\{0\}\}$; $\pi|_U:U\to B(0,\epsilon)$ nie jest homeo



D-d Faktu (K8)

Niech $x_0 \in \mathbb{C}\setminus S$.

$\#\pi^{-1}(x_0) = n$ - wielomian $p(x_0,y)$ ma pojedyncze pierwiastki $y_1,\dots,y_n$, bo $x_0 \notin S$.

Wokół każdego (x_0,y_i) $Z(p)$ jest wykresem funkcji holomorficznej

$$D_{1i} \ni x \mapsto y_i(x) \in D_{2i}$$

BZO: D_{2i} parami rozłączne. Niech $D = \bigcap D_{1i}$. Wtedy

$$\pi^{-1}(D) = \bigsqcup \widehat{D}_i, \quad \widehat{D}_i = \{(x,y_i(x)) \mid x \in D\}$$

(dla $x' \in D$ zachodzi: $p(x',y)=0 \Rightarrow \exists i\ y = y_i(x')$ - bo $y_1(x'),\dots,y_n(x')$ to wszystkie pierwiastki $p(x',y)$) □

Niech $s \in S$. Rozważmy $B(s,\epsilon)$ rozłączne z $S\setminus\{s\}$ i $B^*(s) = B(s,\epsilon)\setminus\{s\}$

Wtedy $\pi^{-1}(B^*(s)) \to B^*(s)$ jest n-krotnym nakryciem, być może niespójnym.

~~Każda składowa spójna $\pi^{-1}(B^*(s))$ jest biholomorficzn~~

Niech $B_j^*(s)$ będzie składową spójną $\pi^{-1}(B^*(s))$; wtedy ~~odwzorowanie~~ nakrycie $B_j^*(s) \xrightarrow{\pi} B^*(s)$ jest biholomorficznie równoważne z $B^*(\epsilon^{1/k}) \to B^*(\epsilon)$, $z \mapsto z^k$

(k - krotność)

Fakt mówi, że istnieje homeo komutujące z nakryciami

$$\begin{array}{ccc} B_j^*(s) & \xleftarrow{f_{s,j}} & B^*(\epsilon^{1/k}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B^*(s) \simeq B^*(\epsilon) & \\ & w+s \leftarrow w & \end{array}$$

Ale nakrycia są lokalnie biholo, więc f też.

Każde $B_j^*(s)$ uzupełniamy jednym punktem $\hat{s}_j$ do $B_j(s)$; ~~no~~

$f_{s,j}^{-1}: B_j(s) \to B(\epsilon^{1/k})$ to mapa na otoczeniu $\hat{s}_j$.

W ten sposób rozszerzyliśmy Reg do $\Sigma(p)$ – tzw. powierzchni Riemanna funkcji algebraicznej zadanej przez p. (K9)

TW 0) $\Sigma(p)$ jest zwarta.

1) Odwzorowanie $\mathrm{Reg} \ni (x,y) \mapsto y$ określa funkcję meromorficzną na $\Sigma(p)$

2) Reg jest spójny.

3) Niech $Z_{proj}(p)$ oznacza zbiór zer ~~jest~~ ujednorodnionego p w $\mathbb{C}P^2$. Wtedy włożenie $\mathrm{Reg} \hookrightarrow Z_{proj}(p)$ rozszerza się do holomorficznej surjekcji $\Sigma(p) \to Z_{proj}(p) \subseteq \mathbb{C}P^2$

D-d 0) pokryj dyskami... $(f_{j,s}^{-1})$

1) Rozważ otoczenie $\hat{s}_j \in B_j(s)$. z – wsp. na $B_j(s)$, w – ~~wsp~~ z^k – wsp. na $B(s)$ (~~przesunięte~~) dobrane tak, by $z(\hat{s}_j)=0$, $w(s)=0$.

$z \mapsto y(z)$ rozważana funkcja.

$$0=p(w,y(z))=a_0(w)y(z)^n+a_1(w)y(z)^{n-1}+\dots+a_n(w)$$

$$y(z)^n+\frac{a_1(w)}{a_0(w)}y(z)^{n-1}+\dots+\frac{a_n(w)}{a_0(w)}=0$$

$a_k(w)$ – wielomiany $\leadsto$ $\left|\frac{a_k(w)}{a_0(w)}\right| \leq \frac{C}{|w|^N}$ w otoczeniu 0.

Lemat

$$z^n+b_1 z^{n-1}+\dots+b_0=0 \Rightarrow |z| \leq 2\max_k |b_k|^{1/k}$$

D-d Niech $b := \max |b_k|^{1/k} > 0$

$z' := \frac{z}{b}$, $z=bz'$: $\quad z'^n+\frac{b_1}{b}z'^{n-1}+\dots+\frac{b_n}{b^n}=0 \qquad \left|\frac{b_k}{b^k}\right| \leq 1$

$$|z'|^n \leq |z'|^{n-1}+|z'|^{n-2}+\dots+1$$

$$1 \leq \frac{1}{|z'|}+\frac{1}{|z'|^2}+\dots+\frac{1}{|z'|^n} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots<1, \ \lightning$$

gdyby $|z'| \geq 2 \qquad |z'|<2$

$|z|<2b$ ∎

$$\Rightarrow |y(z)| \leq 2\max_k \frac{C^{1/k}}{|w|^{N/k}} \leq \frac{C}{|z|^M} \Rightarrow y \text{ meromorficzna.}$$

Nie uprost:

2) Niech W będzie składową Reg-nakryciem krotności $r<n$.

Dla $x'\in\overline{\mathbb{C}}\setminus S$ niech $b_k(x')$ będzie k-tą symetryczną funkcją od $y_1(x'),\dots,y_r(x')$ - pierwiastków $p(x',y)$ t.że $(x',y_j(x'))\in W$.

w pobliżu punktu $\hat{s}$ ~~etc~~ dokładnego nad $s\in S$:

$$|b_k(x')|=\Big|\sum_{i_1\dots i_k} y(P_{i_1})\dots y(P_{i_k})\Big|\leq C|z|^{-N}\leq C|x'-s|^{-M}$$

$W\cap\pi^{-1}(x')=\{P_1,\dots,P_r\}$

~~Każde $b_k(x)$ jest~~ Zatem $b_k\in\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, $b_k\in\mathbb{C}(x)$

Niech $G(x,y)=y^r+b_1(x)y^{r-1}+\dots+b_r(x)$. Wtedy $Z(G)\cap\pi^{-1}(\mathbb{C}\setminus S)\supset W$, ~~Reg~~ $\subset Z(F)$

$\in\mathbb{C}(x)[y]$

$G(x,y)\,|\,F(x,y)$ w $\mathbb{C}(x)[y]$ (!)

Gauss: F przywiedlny.

3) Z 1: w otoczeniu $\hat{S}_j$ funkcja x jest holo, y meromorficzne

$x=z^k$

$y(z)z^m$ jest holo, $\neq 0$ dla $z=0$

$B_j^*(s)\to$ Reg $\hookrightarrow\mathbb{C}^2\subset\mathbb{CP}^2$ $\quad z\mapsto(x(z),y(z))$

$[x(z):y(z):1]=[z^{k+m}:y(z)z^m:z^m]$

holomorficzne

w szczególności ciągłe

Reg jest otwarty gęsty w $Z_{proj}(p)$, stąd teza.

$\square$

ZAD Jeśli $(x_0,y_0)\in Z(P)$, to $(x_0,y_0)\in\overline{\text{Reg}}$