Wiązki liniowe

$E \xrightarrow{\pi} \Sigma$

nad każdym punktem $p \in \Sigma$ wisi włókno: 1-wymiarowa p.l. $E_p \simeq \mathbb{C}$.
izomorfizm nie jest kanoniczny.

cięcie: $s : \Sigma \to E$ t.że $s(p) \in E_p$
uogólnienie funkcji

Pdy

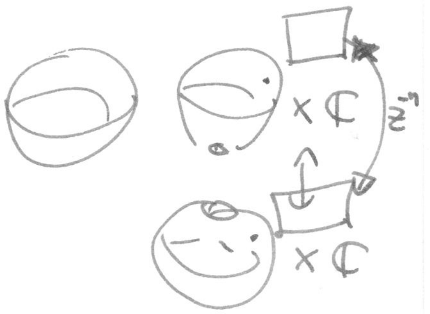
1) $T\Sigma \to \Sigma$ cięcie - pola wektorowe

2) $T^*\Sigma^1 \to \Sigma$ cięcie holomorficzne : formy holomorficzne, $H^{1,0}(\Sigma)$.

3) $n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ wiązka E_n nad $\overline{\mathbb{C}}$: $[\mathcal{O}(n)]$

$$\pi^{-1}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}) \simeq (\overline{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}) \times \mathbb{C} \qquad (z, x)$$

$$\pi^{-1}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}) = (\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}) \times \mathbb{C} \qquad (z, z^{-n}x)$$



cięcie nad górną sferą : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

na dole: $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0,\infty\} \subseteq \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z^{-1} = w$$

$$z^{-n} f(z) \rightsquigarrow w^n f(w^{-1})$$

np. $f(z) = \sum a_k z^k \rightsquigarrow z^{-n}\sum a_k z^k \rightsquigarrow w^n \sum a_k w^{-k} = \sum a_k w^{n-k}$

wielomiany stopnia n są dają holomorficzne cięcia tej wiązki.

Def

Holomorficzna wiązka liniowa nad powierzchnią Riemanna Σ to ciągłe odwzorowanie $\pi: E \to \Sigma$ wraz z rodziną homeomorfizmów (trywializacji) $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ indeksowanych elementami $U \in \mathcal{U}$ pewnego otwartego pokrycia Σ, które to dane spełniają następujące warunki:

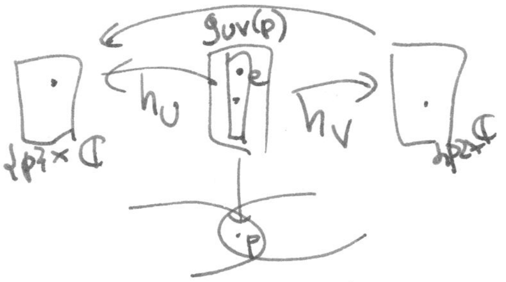
1) $\forall U \in \mathcal{U}$ diagram

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

jest przemienny

2) ~~$\forall U \in \mathcal{U}$ $\forall p \in U$ odwzorowanie~~ $\pi^{-1}(p) \xrightarrow{h_U} \{p\} \times \mathbb{C} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{C}$

$\forall U, V \in \mathcal{U}$ $\exists$ holomorficzne $g_{UV}: U \cap V \to \mathbb{C}^*$, że dla $p \in U \cap V$ i $e \in \pi^{-1}(p)$ zachodzi $\cancel{h_U(e) = g_{UV}(p) \cdot h_V(e)}$ ~~(mnożenie w drugiej wsp.)~~



~~inaczej~~

$$h_U \circ h_V^{-1}(p, x) = (p, g_{UV}(p)x)$$

- Zbiór $\pi^{-1}(p)$ nazywamy włóknem wiązki E nad punktem p i oznaczamy E_p; Ma on strukturę 1-wymiarowej p. liniowej nad $\mathbb{C}$ (dzięki trywializacjom).
- Funkcje g_{UV} spełniają warunek kocyklu: (1) $g_{UV} g_{VW} = g_{UW}$ na $U \cap V \cap W$ (ale też (2): $g_{VU} = g_{UV}^{-1}$)
- Dowolne pokrycie $\mathcal{U}$ powierzchni Σ z zadanym kocyklem, tj. kolekcją funkcji $g_{UV}: U \cap V \to \mathbb{C}^\times$ spełniających (1) i (2), pozwala odtworzyć wiązkę:

$$\cancel{E = \coprod U \times \mathbb{C}} \quad E = \coprod_{U \in \mathcal{U}} U \times \mathbb{C} \Big/ \sim \quad , \quad \underset{U \times \mathbb{C}}{(p, x)} \sim \underset{V \times \mathbb{C}}{(p, g_{VU}(p)x)}$$

• Wiązki E, F są izomorficzne, jeśli istnieje homomorfizm $\varphi: E \Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & \Sigma & \end{tikzcd}$$

tże 1) $\varphi(E_p) \subseteq F_p$

2) $\varphi: E_p \to F_p$ jest liniowe

3) φ jest holomorficzne:

3):

$$h^E_U : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$$

~~nad $U \cap V$: $U \times \mathbb{C} \to$~~

$$h^F_V : \pi_F^{-1}(V) \to V \times \mathbb{C}$$

nad $U \cap V$: $(U \cap V) \times \mathbb{C} \xrightarrow{(h^E_U)^{-1}} \pi_E^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \pi_F^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{h^F_V} (U \cap V) \times \mathbb{C}$

$$(p, x) \longmapsto (p, L_{U\cap V}(p) \cdot x)$$

Funkcje $L_{U \cap V} : U \cap V \to \mathbb{C}^\times$ muszą być holomorficzne.

• cięcie holomorficzne wiązki E: $s: \Sigma \to E$, tże $s(p) \in E_p$

oraz $\forall U \in \mathcal{U}$ $U \xrightarrow{s} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{h_U} U \times \mathbb{C} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{C}$ jest holomorficzne

$\left(h_U(s(p)) = (p, s_U(p)), \ s_U : U \to \mathbb{C} \text{ holomorficzne} \right)$

$$s_U = g_{UV} \cdot s_V$$

• cięcie meromorficzne – wiadomo.

• cięcie meromorficzne ma dobrze określony rząd w punkcie: $\mathrm{ord}_p s$,

więc zadaje ~~pewien~~ dywizor $(s) = \sum_{p \in \Sigma} (\mathrm{ord}_p s) \cdot p$.

izomorfizm w trywializacjach (nad wspólnym pokryciem $\mathcal{U}$):

$$\varphi_U : \overset{E}{U \times \mathbb{C}} \to \overset{F}{U \times \mathbb{C}}$$

$$\varphi_U(p, x) = (p, \psi_U(p) \cdot x) \quad \text{tże}$$

$$\psi_U : U \to \mathbb{C}^*$$

$$\begin{tikzcd} & E & F \\ U & (p, x) \arrow[r] \arrow[d] & (p, \psi_U(p) x) \arrow[d] \\ V & (p, g^E_{VU}(p) x) \arrow[r] & (p, g^F_{VU} \psi_U(p) x) = \psi_V(p) g^E_{VU}(p) x \end{tikzcd}$$

$$g^F_{VU} = \psi_V g^E_{VU} \psi_U^{-1}$$

$D = \sum n_i p_i$ – dywizor $\rightsquigarrow$ wiązka $L(D)$

Wokół p_i wybieramy małe otwarte U_i, mapy, i mapę $U_i \to B(0,1)$, z_i – wsp.

U_i – parami rozłączne. $U_0 := \Sigma \setminus \{p_i \mid i=1,2,\dots\}$

$\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \dots\}$

~~kocykl~~: Niech $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $f_i(z_i) = z_i^{n_i}$ $\quad (i=0 : f_0(p) \equiv 1)$

kocykl: $g_{i0}(z_i) = z_i^{n_i}$, $g_{0i}(z_i) = z_i^{-n_i}$ – zadaje wiązkę $L(D)$;

kolekcja f_i zadaje jej cięcie meromorficzne $=: s_D$; $(s_D) = D$.

[Jeśli zamiast z_i użyjemy wsp. w_i na U_i, to $u_i = (w_i/z_i)^{n_i}$, $u_0 \equiv 1$
zadaje izomorfizm w trywializacjach: $g^w_{i0} = u_i g^z_{i0} u_0^{-1}$
ten izomorfizm przerzuca s^z_D na s^w_D]

Fakt

Jeśli s jest meromorficznym cięciem wiązki E, to $E \simeq L((s))$.

D-d: Niech $D = (s)$;

Niech s_D będzie kanonicznym cięciem $L(D)$. Poza nośnikiem D przyporządkowanie $\lambda s(p) \mapsto \lambda s_D(p)$ określa izomorfizm $E \to L(D)$.

Ten izomorfizm rozszerza się do izomorfizmu nad Σ:

w trywializacjach w otoczeniu p_i:

$$
\begin{array}{ccc}
E: & & L(D) \\
s(z_i) & & s_D(z_i) \\
\| & & \| \\
h(z_i)\, z_i^{n_i} & \xleftarrow{\cdot h(z_i)} & z_i^{n_i} \\
h(0) \neq 0 & &
\end{array}
$$

□

Uwaga Jeśli s_1, s_2 są mero cięciami E, to $s_1/s_2 \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

W szczególności, każde holomorficzne cięcie E jest [illegible] mero cięcie s jest postaci fs, $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

fs holo $\Leftrightarrow (fs) \geq 0 \Leftrightarrow (f) + (s) \geq 0 \Leftrightarrow f \in H^0((s))$

$H^0(L(D)) = \Gamma(L(D)) \simeq H^0(D)$ $\quad$ (holo cięcia $L(D)$)

Fakt

$$L(D_1)\simeq L(D_2) \iff \exists f\in\mathcal{M}(\Sigma)\quad D_1 = D_2+(f)$$

D-d:

$\Leftarrow$ fs_{D_2} jest mero cięcie $L(D_2)$, $(fs_{D_2}) = (f)+(s_{D_2}) = (f)+D_2 = D_1$

więc z ↑ $L(D_2)\simeq L(D_1)$

$\Rightarrow$ $u: L(D_1)\to L(D_2)$, $u\circ s_{D_1}$ - mero cięcie $L(D_2)$, $= fs_{D_2}$

ale $(u\circ s_{D_1}) = (fs_{D_2}) = (f)+(s_{D_2}) = (f)+D_2$

$\quad\ \ \|$

$D_1 = (s_{D_1})$

∎

Dywizory D_1, D_2 nazywamy liniowo równoważnymi jeśli $\exists f\in\mathcal{M}(\Sigma): D_1=D_2+(f)$

$Cl(\Sigma) :=$ grupa klas równoważności dywizorów na Σ.

$Cl(\Sigma)\to Pic(\Sigma)$ na klasy izo holo wiązek liniowych.

dodawanie? odwrotność?

ZAD: $E^* = Hom_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$ - wiązka dualna; $L(D)^*\simeq L(-D)$

· $E_1\otimes E_2$: $L(D_1)\otimes L(D_2)\simeq L(D_1+D_2)$

w terminach kocykli: jeśli g_{UV} (g^1_{UV}, g^2_{UV}) to kocykle E, E_1, E_2 to

E^*: g_{UV}^{-1}

$E_1\otimes E_2$: $g^1_{UV} g^2_{UV}$

TW Każda liniowa wiązka ma nietrywialne cięcie meromorficzne. Zatem:

Każda liniowa wiązka holo jest postaci $L(D)$ $\left(Cl(\Sigma)\simeq Pic(\Sigma)\right)$