Niech Otw(Σ) będzie kategorią otwartych podzbiorów (Sh1)

Σ i ich zawierań.

Def Presnop grup abelowych w Σ to funktor kontrawariantny
$\mathrm{Otw}(\Sigma) \to \mathrm{Ab}$ $\quad (U \subseteq V \rightsquigarrow F(V) \xrightarrow{r_U^V} F(U))$ $(F(\emptyset) = 1)$

Pdy $\mathcal{O}(U), \mathcal{C}^\infty(U), \Omega^{0,1}(U), \ldots, \underline{\mathbb{Z}}(U) := \mathbb{Z}$.

Def Presnop F jest snopem jeśli: dla każdego otwartego $U \subseteq \Sigma$
i dla każdego pokrycia U_α zbioru U i każdego układu
$f_\alpha \in F(U_\alpha)$, który spełnia $r^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = r^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta)$
$- \exists! f \in F(U) \quad r^U_{U_\alpha}(f) = f_\alpha$

Pdy $\mathcal{O}(U), C^\infty(U), \ldots$ $\qquad$ ale $\underline{\mathbb{Z}}$ nie dla U niespójnych...

Def
- Źdźbło presnopu F w $x \in \Sigma$: $\varinjlim_{U \ni x} F(U) =: F_x$
- kiełek w x - element F_x
- Jeśli $U \ni x$ i $f \in F(U)$, to f wyznacza element $f_x \in F_x$
  - kiełek f w x.

Pd $f, g \in C^\infty(U)$ mają ten sam kiełek w $x \in U$, jeśli $\exists V: x \in V \subseteq U$, że
$f|_V = g|_V$.

Def Przestrzeń etalna presnopu F: $\mathrm{Et}(F) = \bigsqcup_{x \in \Sigma} F_x$
topologia: $(U, f \in F(U)) \rightsquigarrow \{ f_x \mid x \in U \}$ - baza zbiorów otw.

Usnopienie pre-snopa F:

$$\mathcal{F}(U) := \{ s : U \to Et(F) \mid s(x) \in F_x,\ s \text{ ciągłe} \}$$ - to jest snop.

Fakt

Jeśli F jest snopem, to $F(U) \ni f \mapsto (x \mapsto f_x) \in \mathcal{F}(U)$ jest izomorfizmem. $\boxed{?}$

Def (Homo)morfizm snopów (pre)snopów $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$: $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, t.że

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "r^U_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

α indukuje ciągłe odwzorowanie $Et(\mathcal{F}) \to Et(\mathcal{G})$, t.że

$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ - homomorfizm

ZAD $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfizm snopów
$\ker \alpha$ jest snopem, ale $\operatorname{Im} \alpha$ presnopem, niekoniecznie snopem
(zwykle redefiniujemy $\operatorname{Im}\alpha$ jako usnopienie $\operatorname{Im}\alpha$)

Pd: $\mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*$ nad $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $\operatorname{Im} \exp = \mathcal{O}^*$, ale $z \in \mathcal{O}^*(X)$ nie leży w $\exp(\mathcal{O}(X))$

Def $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ jest dokładny, jeśli $\operatorname{Im} \alpha \underset{\text{snopowo}}{=} \ker \beta$;

równoważnie: $\forall x\ \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$ jest dokładny, $\operatorname{Im}\alpha_x = \ker \beta_x$

Def Kohomologie. $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ - pokrycie Σ, $\mathcal{F}$ - snop nad Σ.

$[U_{123} := U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap U_{\alpha_3}$ itd$]$

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_q} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_q}) \quad \text{(antysymetrycznie)}$$

$$d : C^q \to C^{q+1} : (dc)_{i_0 \dots i_{q+1}} := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j c_{i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_{q+1}}\big|_{U_{i_0 \dots i_{q+1}}}$$

$d^2 = 0$, $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker d / \operatorname{im} d$.

Def Niech $\mathcal{V}=(V_j)$ będzie pokryciem wpisanym w $\mathcal{U}=(U_i)$ Sh3
tzn $\forall j\ \exists i=\tau(j)\ V_j \subseteq U_{\tau(j)}$ $\tau: J \to I$
Wtedy definiujemy odwzorowanie wpisujące $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\tau^*} C^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$:
$(\tau^* c)_{j_0 \dots j_q} := c_{\tau(j_0)\dots\tau(j_q)}\big|_{V_{j_0\dots j_q}}$. To τ^* indukuje $\tau^*: H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$

Lemat
1) $\tau^*: H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ nie zależy od wyboru τ $\boxed{?}$
2) $\tau^*: H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ jest 1-1 $\boxed{?}$

Def $\check{H}^q(\mathcal{F}) := \lim\limits_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (kohomologie Čecha $\mathcal{F}$)

Pdy
- $H^0(\mathcal{F})$: $c \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \leftrightarrow (c_i)$ t.że $c_i|_{U_{ij}} = c_j|_{U_{ij}} \rightsquigarrow \exists!\, c: c|_{U_i} = c_i$
  $dc=0 \Rightarrow$ $(dc)_{ij} = c_i|_{U_{ij}} - c_j|_{U_{ij}}$
  $\ker d \cong \mathcal{F}(\Sigma)$
  $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\Sigma)$
- wiązka $E \rightsquigarrow$ kocykl $(g_{UV}) \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ $(dg=0)$
  izomorfizm wiązek: $g'_{UV} = \varphi_U g_{UV} \varphi_V^{-1} \rightsquigarrow g'_{UV}/g_{UV} = \varphi_U/\varphi_V$
  $g'/g = d\varphi$

Klasy izomorfizmu wiązek liniowych $\mathrm{Pic}(\Sigma) \simeq H^1(\mathcal{O}^*)$

Sh4

Def
Snop drobny: $\forall \mathcal{U}$ $\exists$ endomorfizmy φ_i snopa $\mathcal{F}$, a

$\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$, też $\sum \varphi_i = \mathrm{Id}$.

Fakt
$\mathcal{F}$ drobny $\Rightarrow$ $H^q(\mathcal{F}) = 0$ dla $q > 0$.

D-d:
$c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $dc = 0$

$$a_{i_1 \dots i_q} := \sum_{i_0} \varphi_{i_0} c_{i_0 i_1 \dots i_q}$$

$$(da)_{i_0 \dots i_q} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j a_{i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_q} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sum_s \varphi_s c_{s i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_q} =$$

$$\cancel{= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sum_s (-1)^j \varphi_s c_{i_0 \dots \underset{j}{s} \dots i_q}} \quad \sum_s \varphi_s \sum_{j=0}^{q} (-1)^j c_{s i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_q} \underset{dc=0}{=}$$

$$= \sum_s \varphi_s c_{i_0 \dots i_q} = c_{i_0 \dots i_q} \qquad \square$$

Długi ciąg dokładny kohomologii:

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ciąg dokładny snopów

$\boxed{?}$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\varphi} H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{H}) \to H^2(\mathcal{F}) \to \dots$$

Pd: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}^* \to 0$

nad $\mathbb{C}^\times$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^\times) \to \mathbb{Z}$$

$\cancel{f \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} f(z)\,dz}$

"$\log \frac{z}{2\pi i}$" $\mapsto$ z

Konstrukcja φ: $h \in H^0(\mathcal{H}) = \mathcal{H}(\Sigma)$ $\rightsquigarrow$ pokrycie $\mathcal{U} = (U_i)$, że $h|_{U_i} = g_i$

$g_i|_{U_{ij}} - g_j|_{U_{ij}} \in \ker(\mathcal{G} \to \mathcal{H})$ $\rightsquigarrow$ $= f_{ij}$, $[(f_{ij})] \in H^1(\mathcal{F})$.

(Jeśli $f_{ij} = F_i - F_j$, to $g_i - F_i = g_j - F_j$)

Sh5

1) $0 \to \mathcal{O} \to \Omega^0 \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1} \to 0$

dwobne

dokładności: $\alpha \in \Omega^{0,1}(U)$, ($U$ - ot. x)

bzo $\alpha \in \Omega^{0,1}_c(U)$, klasyka

$$\left(\int_U \partial\alpha = \int_U d\alpha = 0 \Rightarrow\right) \partial\alpha \overset{\Downarrow}{=} \Delta f = \partial\bar\partial f$$

$$\partial(\alpha - \bar\partial f) = 0$$

$$d(\alpha - \bar\partial f) = 0$$

$$\alpha - \bar\partial f = dg = \bar\partial g\,,\ \alpha = \bar\partial(f+g)$$

$$0 \to H^0(\mathcal{O}) \to H^0(\Omega^0) \to H^0(\Omega^{0,1}) \to H^1(\mathcal{O}) \to 0$$

(dwoby)

$$\mathbb{C} \to C^\infty(\Sigma) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1}(\Sigma) \to H^1(\mathcal{O}) \to 0$$

$$H^1(\mathcal{O}) \simeq \operatorname{coker}\bar\partial = H^{0,1}(\Sigma) \underset{B}{\simeq} (H^{1,0})^* \simeq \mathbb{C}^g$$

2) $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}^* \to 0$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H^1(\mathbb{Z}) & \to & H^1(\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(\mathbb{Z}) \\ ?\wr & & !\wr & & !\wr & & ?\wr \\ \Lambda & \to & \mathbb{C}^g & \to & \mathrm{Pic}(\Sigma) & \to & \mathbb{Z} \end{array}$$

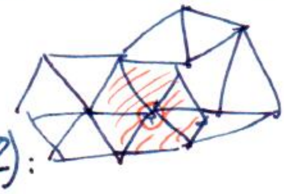
Lemat

Przy utożsamieniu $H^1(\mathcal{O}) \to H^{0,1} \longrightarrow H^{1,0*} \to \mathbb{C}^g$

podgrupie $H^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{odpowiada}]{} \check\Lambda$

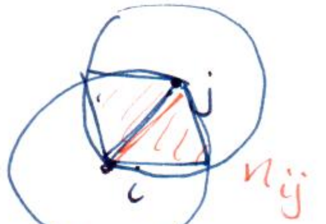
1) $\operatorname{Im} H^1(\mathbb{Z}) \subseteq \Lambda$:

element $H^1(\mathbb{Z})$ jest realizowany w $H^1(\mathcal{V},\mathbb{Z})$ dla pewnego $\mathcal{V}$.
Dobieramy triangulację Σ t.że pokrycie Σ gwiazdami wierzchołków $\mathcal{U}$ jest drobniejsze od $\mathcal{V}$.



Nasz element możemy wtedy reprezentować w $H^1(\mathcal{U},\mathbb{Z})$:

wierzchołki $1,2,\dots i,\dots$ kocykl $n_{ij}\in\mathbb{Z}$
gwiazdy $U_1,U_2\dots U_i\dots$



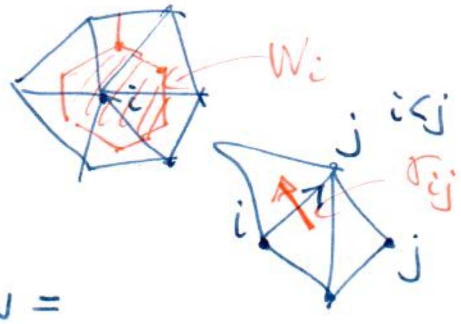
[Izomorfizm $H^1(\mathcal{O})\to H^{0,1}$:
$\varphi_{ij}\in\mathcal{O}(U_i\cap U_j)\rightsquigarrow\varphi_{ij}=f_i-f_j,\ f_i\in C^\infty(U_i)\rightsquigarrow\theta=\bar\partial f_i\in H^{0,1}$

$n_{ij}=f_i-f_j,\quad f_i\in C^\infty(U_i)\quad,\ \theta=\bar\partial f_i$

dalej:

$$H^{0,1}\underset{B}{\simeq}H^{1,0\,*}\underset{\omega_i}{\simeq}\mathbb{C}^g$$

$$\theta\longmapsto\Big(\int_\Sigma\omega_j\wedge\theta\Big)_{j=1,\dots,g}$$

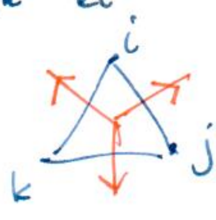


$$\int\omega\wedge\theta=\int\omega\wedge\bar\partial f_i=\sum_{W_i}\int_{W_i}\omega\wedge\bar\partial f_i$$

$$=-\sum_i\int_{W_i}d(f_i\omega)=\sum_i\int_{\partial W_i}f_i\omega=\sum_{\substack{i<j\\ i-j}}\int_{\gamma_{ij}}(f_i-f_j)\omega=$$

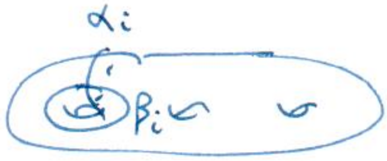
$$=\sum_{\substack{i<j\\ i-j}}n_{ij}\int_{\gamma_{ij}}\omega=\int_\Gamma\omega\ ,\quad\Gamma=\sum_{\substack{i<j\\ i-j}}n_{ij}\gamma_{ij}.$$ Γ jest sumą cykli:

$n_{ij}+n_{jk}+n_{ki}=0$



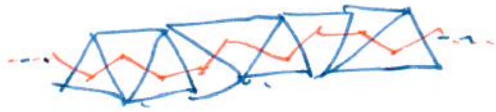
zatem $\Big(\int_\Gamma\omega_i\Big)_i\in\Lambda$

2) $\Lambda \subseteq \operatorname{im} H^1(\mathbb{Z})$



wystarczy pokazać, że $\lambda_{\alpha_i}, \lambda_{\beta_i} \in \operatorname{im} H^1(\mathbb{Z})$

do ułożonej γ ($=\alpha_i$ lub β_i) dobieramy triangulację tak, by γ była cyklem odcinków γ_{ij}



kocykl: $n_{ij} = 1$ wzdłuż γ.
temu kocyklowi odpowiada λ_γ □

$$\left[\mathcal{C}\ell^0(\Sigma) \xrightarrow{D \mapsto L(D)} H^1(\mathcal{O}^*) \simeq \mathrm{Pic}(\Sigma)\right]$$

<u>Lemat 2</u>

$H^2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

<u>D-d</u>: $\mathcal{U}$ - pokrycie gwiazdami triangulacji.

$$C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \ni \underset{n}{\underset{\parallel}{(n_{ijk})}} \xmapsto{\;T\;} \sum_{\substack{i<j<k \\ \Delta_{ijk}}} \operatorname{sgn}(ijk)\, n_{ijk} \in \mathbb{Z}$$

$n \in \ker T \Leftrightarrow n \in \operatorname{Im} d$:

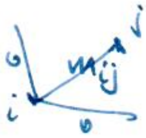
$n_{ijk} = m_{jk} + m_{ki} + m_{ij}$

$$T(dm) = \sum_{\substack{i<j<k \\ \Delta_{ijk}}} \operatorname{sgn}(ijk)(m_{ij} + m_{jk} + m_{ki})$$

$$= \sum_{\substack{i<j \\ i \mapsto j}} (m_{ij} - m_{ij}) = 0$$

Ale też:

m: $m_{ij} = 1$, pozostałe 0



dm:

• dodając do n kolejne dm możemy dojść do n'_{ijk} o nośniku w 1 trójkącie.

• Jeśli $T(n)=0$, to tak przerobione n' jest $=0$.

$\rightsquigarrow T(n) = \sum dm$ □

Lemat 3

Sh8

Przy odwzorowaniu $H^1(\mathcal{O}^*) \to H^2(\mathbb{Z})$

$$L(p) \mapsto 1$$

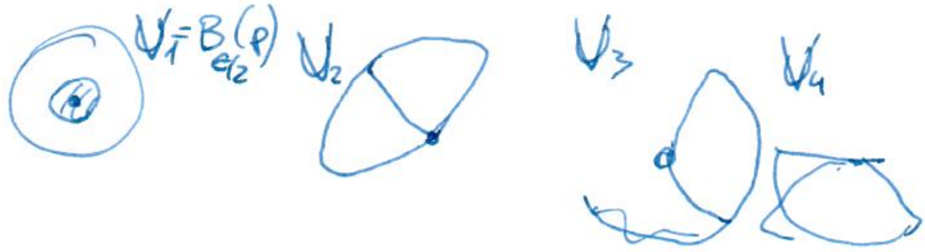
D-d:

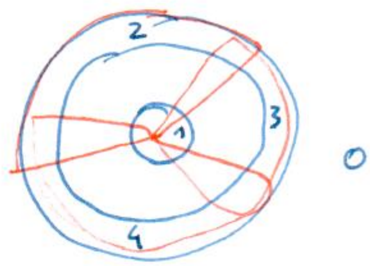
$L(p)$: 

$U_0 = \Sigma \setminus \{p\}$ $\quad g_{10}(z) = z.$

rozdrabiamy pokrycie:

V_0 jak.
$= \Sigma \setminus B_\epsilon(p)$





$V_i < U_1$ dla $i > 0$

$V_0 < U_0$

$g_{ij}(z) = 1$ dla $i, j > 0$

$g_{j0}(z) = z = \exp(2\pi i\, f_j(z))$

$f_j \in \mathcal{O}(V_j \cap V_0)$

dobieramy tak, by $f_{20} = f_{30}$ na V_{023}

$f_{30} = f_{40}$ na V_{034}

wtedy $f_{40} - f_{20} = 1$ na V_{024}

$n_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$, $n_{024} = 1 \rightsquigarrow \sum n_{ijk} = 1.$ □

$$\begin{tikzcd}
Cl^0(\Sigma) \arrow[rr, "D \mapsto L(D)"] \arrow[dr, "\mu", "\cong"'] & & H^1(\mathcal{O}^*)^0 = \ker\left(H^1(\mathcal{O}^*) \to H^2(\mathbb{Z})\right) \\
& \mathbb{C}^g/\Lambda \simeq H^1(\mathcal{O})/H^1(\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Lemat 4

Diagram komutuje: (homomorfizmy grup)

D-d: wystarczy to sprawdzić na generatorach, $D = p - q$.

Sh9

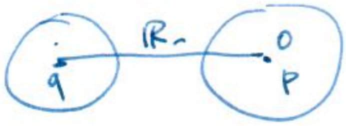
$Cl^0(\Sigma)$

$D = p - q$

μ

$\left(\int_\gamma \omega_i\right)_i \in \mathbb{C}^g/\Lambda$

bzo: γ jdn w tw. Abela:



$F: \Sigma \to \mathbb{R}$,

$F\restriction \gamma \to \mathbb{R}_-$

$F(w) = w$, $F(z) = z^{-1}$ ..

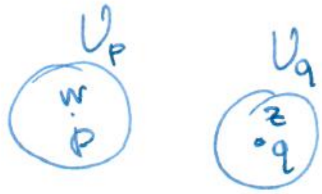
Poza γ, F ma logarytm:

$F = \exp(2\pi i f)$, f ma skok 1

~~wzdł~~ w poprzek γ.

$H^1(\mathcal{O}^*)$

$L(p-q)$



$U_0 = \Sigma \setminus \{p,q\}$

$g_{p0}(w) = w$

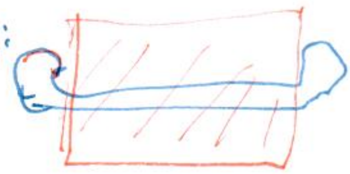
$g_{q0}(z) = z^{-1}$

Pokrycie drobniejsze:

$V_q = U_q$ $\quad$ $V_p = U_p$

V_0: $\quad V_0 < U_0$

V_1: $\quad V_1 < U_0$



na V_0: $F = \cancel{\log f_0}\ \exp 2\pi i f_0$

na V_1: $F = \cancel{\log}\ \exp 2\pi i f_1$

$f_1 - f_0 = \begin{cases} 0 & \text{na dole} \\ 1 & \text{na górze} \end{cases} \quad V_0 \cap V_1$

Kocykl na $\mathcal{V}$:

$g_{p0} = g_{p1} = w$, $g_{q0} = g_{q1} = z^{-1}$

w $H^1(\mathcal{O})$: $\left[\begin{array}{ll} f_{p0} = f_0 & f_{q0} = f_0 \\ f_{p1} = f_1 & f_{q1} = f_1 \end{array}\right.$

w H^{01}: $\theta = \bar\partial f_i = \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar\partial F}{F}$

§ Jakiemu elementowi Jac(Σ) odpowiada Θ?

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge \Theta = \int_{\Sigma\setminus\gamma} \omega \,\bar{\partial} f_i = \cancel{\int d(f_i \omega)} \int \omega\, \bar{\partial} \frac{\log F}{2\pi i} = \int d\left(\frac{\log F}{2\pi i} \cdot \omega\right) =$$

$$= \int_{\gamma} \left(\frac{\log F_+ - \log F_-}{2\pi i}\right) \cdot \omega = \int_{\gamma} \omega$$

$\square$