Fundamentalne tw - wersja niezwarta

Σ - spójna, jednospójna, niezwarta

$\rho \in \Omega^2_c(\Sigma)$, $\int \rho = 0$

Wtedy $\exists\, \varphi \in \Omega^0(\Sigma)$ $\Delta\varphi = \rho$ i $\underbrace{\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0}_{\text{nowe}}$

<u>Wn</u>

Σ jw spójna, jednospójna, niezwarta jest biholomorficzna z $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{D}$.

<u>D-d Wn</u>:

Weźmy $p \in \Sigma$, z - lok. wsp wokół p, $(p \leftrightarrow 0)$, $\beta =$, $A = \bar\partial\left(\frac{1}{z}\beta\right)$

Niech $\rho = \partial A \,(= dA)$; $\int \rho = \int dA = 0$.

FT $\Rightarrow \rho = \partial\bar\partial g$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Niech $a = A - \bar\partial g + (\bar A - \overline{\bar\partial g}) \in \Omega^1(\Sigma, \mathbb{R})$

$\partial(A - \bar\partial g) = \partial A - \partial\bar\partial g = \rho - \partial\bar\partial g = 0$, zatem $da = 0$

Σ jednospójne, więc $a = d\psi$ dla pewnej $\psi \in \Omega^0$ $\left(\psi(x) = \int_{x_0}^{x} a\right)$

$$\underbrace{A - \bar\partial g + \overline{A - \bar\partial g}}_{a} = d\psi = \bar\partial\psi + \partial\psi \Rightarrow A - \bar\partial g = \bar\partial\psi$$

$$A = \bar\partial g + \bar\partial\psi, \quad \psi \in \Omega^0(\Sigma, \mathbb{R})$$

$$\bar\partial\Big(\underbrace{\beta\cdot\tfrac{1}{z} - (g + \psi)}_{f}\Big) = 0$$

f meromorficzna na Σ z biegunem prostym w p

$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Im} f(x) = 0$.

$f: \Sigma \to \overline{\mathbb{C}}$

$\cup\!| \qquad \cup\!|$

$\Sigma_- \cup \Sigma_+ \qquad \mathbb{C} = H_- \cup \mathbb{R} \cup H_+$

przecinobrzeg H_-, H_+

$\Sigma_- \cup \Sigma_+$ gęste w Σ, $f_\pm : \Sigma_\pm \to H_\pm$ holomorficzne

f: otoczenie pkt $\Sigma \xrightarrow{\text{hom}}$ otoczenie ∞ w $\overline{\mathbb{C}} \rightsquigarrow \Sigma_\pm \neq \emptyset$

- $f_\pm$ są właściwe: | $K \subseteq H_+$ zwarty $\Rightarrow \exists\, \epsilon > 0\ \forall z \in K\ \operatorname{Im} z > \epsilon$ (U2)

$\Downarrow$

$f^{-1}(K)$ zwarty (bo $\operatorname{Im} f \to 0$ w ∞)

$\parallel$

$f_+^{-1}(K)$

[~~f: otoczenie p w Σ $\xrightarrow{\text{biholo}}$ otoczenie ∞ w $\overline{\mathbb{C}}$~~

~~stąd widać, że $\Sigma_+, \Sigma_- \neq \emptyset$.~~]

$f_\pm$ ma stopień $d_\pm$ (jako holomorficzne i właściwe)

- $\underline{d_\pm = 1}$: | gdyby $d_+ \geq 2$, to $\exists\, x_n, x_n' \in \Sigma_+$ $f(x_n) = f(x_n') = i n$ oraz $x_n \neq x_n'$ lub $f'(x_n) = 0$

wszystkie x_n, x_n' leżą w $K \supseteq \{x \in \Sigma \mid \operatorname{Im} f(x) \geq 1\}$, który jest zwarty - więc istnieje podciąg zbieżny do x, x'. Z ciągłości $f(x) = f(x') = \infty$, zatem $x = x' = p$ - ale ~~wtedy $f'(p) = 0$, ↯~~ to sprzeczne z tym, że f jest lok. ~~haco~~ biholo w pobliżu p

A więc $f_\pm : \Sigma_\pm \to H_\pm$ są biholo.

- $f : \Sigma \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}}$: | gdyby $f(x) = f(x') = z \in \overline{\mathbb{C}}$, to $\exists$ dyski $\underset{x}{\underset{\rotatebox{90}{$\in$}}{D}}$, $\underset{x'}{\underset{\rotatebox{90}{$\in$}}{D'}}$ t.że $f(D), f(D') \supseteq N$ - otoczenie z.

weźmy $z' \in N \cap H_+$; $\exists\, y \in D, y' \in D' : f : y, y' \mapsto z'$

ale f_+ jest 1-1, ↯

$f : \Sigma \xrightarrow[\text{bij.}]{} \underset{f[\Sigma]}{\underset{\parallel}{U}} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, U otwarty, $U \supseteq H_\pm$, $\infty \in U \rightsquigarrow U = \overline{\mathbb{C}} \setminus I$

$\uparrow$ zwarty podzbiór $\mathbb{R}$

ale Σ, więc i U, jednospójny $\Rightarrow$ I to punkt lub $[a,b]$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\Sigma \simeq \mathbb{C}$ $\qquad$ $\Sigma \simeq \overline{\mathbb{C}} \setminus [a,b] \simeq \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, 0] \simeq H_+ \simeq \mathbb{D}$

$\square$

Wnioski

- Jednospójna p. Riemanna jest biholo z $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$.
  (spośród zwartych Σ_g tylko Σ_0 jednospójna, a $\Sigma_0 \simeq \overline{\mathbb{C}}$)

- $\tilde{\Sigma} \simeq \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H} \Rightarrow \Sigma \simeq \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}/\Lambda$ lub $\mathbb{H}/\Gamma$ dla $\Gamma < \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ dyskretnej.
  $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong PSL(2,\mathbb{R})$

- otwarty, jednospójny właściwy (tj. $\neq \mathbb{C}$) podzbiór $U \subseteq \mathbb{C}$ jest $\simeq \mathbb{H}$.
  bzo: $0 \notin U$, $1 \in U$
  jednospójny, $\rightsquigarrow \sqrt{z}$ można w nim określić
  bzo: $0 \notin U$, $1 \in U$
  $U \ni z \xmapsto{f} z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \log f = \int_{1}^{z} \frac{f'}{f}\,dz \rightsquigarrow \sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2}\log f)$

  - $\sqrt{z}$ jest 1-1 $(\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2)$
  - $\sqrt{U}$ omija pewien otw. Dysk: $\sqrt{z_0} = w_0$, $B(w_0, \epsilon) \subseteq \sqrt{U}$
    $\Downarrow$
    $B(-w_0, \epsilon) \cap \sqrt{U} = \emptyset$

    (inaczej $\exists z_1, z_2$ tże $\sqrt{z_1} = -\sqrt{z_2}$
    $z_1 = z_2$
    $\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2}$ ↯)

  - $B(w_0, \epsilon) \cap \sqrt{U} = \emptyset \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z} - w}$ ograniczona na U $\Rightarrow U \not\simeq \mathbb{C}$ (Liouville)
    niestała

    □

- otw. jednospójny podzbiór $\mathbb{R}^2$ jest homeo z $\mathbb{R}^2$.

- Picard: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holo, niestała $\Rightarrow \#(\mathbb{C} \setminus f[\mathbb{C}]) \leq 1$.
  gdyby nie, to $f: \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty, a, b\} \underset{\text{biholo}}{\simeq} \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty, 0, 1\}$
  $\uparrow$ nakrycie uniwersalne
  $\tilde{f}$
  $\mathbb{D}$
  (bo $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty, 0, 1\}) = F_2$
  $\mathbb{C}$ nakrywa tylko $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}$ Hoj $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$
  i $\mathbb{C}/\Lambda \simeq T^2$)

  f podnosi się do $\hat{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$
  Liouville: $\hat{f} = \text{const}$, ↯.