A (K1)

Σ - zwarta p. Riemanna $\rightsquigarrow k_\Sigma := \mathcal{M}(\Sigma)$ - ciało funkcji meromorficznych.

$f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ niestała $\rightsquigarrow f : \Sigma \to \overline{\mathbb{C}}$

$$k_\Sigma \xleftarrow{f^*} k_{\overline{\mathbb{C}}} \quad 1\text{-}1$$
$$k_{\overline{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}(z)$$

<u>TW</u> $[k_\Sigma : k_{\overline{\mathbb{C}}}] = \deg f$

<u>D-d</u>

$\geq$ Niech $p \in \mathbb{C}$ będzie regularną wartością f, $f^{-1}(p) = \{p_1 \dots p_d\}$.

(vertex) Istnieje $f_i \in k_\Sigma$: $f_i(p_i) = 1$, $f_i(p_j) = 0$

$h^0_\alpha((g+1)p_i) > 1$, bo $\bar\partial \beta(z) \left(\frac{1}{z-p_i}\right)^k$ [illegible] w $H^{0,1}(\Sigma) \rightsquigarrow g_i$ z biegunem tylko w p_i

g_i składamy z $\prod_{j \neq i} (z - g_i(p_j))$

Vandermonde - vertex

f_i lnz nad $k_{\overline{\mathbb{C}}}$: gdyby $\sum \alpha_i(f(w)) f_i(w) = 0$, $\alpha_i \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$

domnażamy przez taką potęgę $(z-p)$, by $\alpha_i \circ f$ stały się regularne w p_j,

a któraś niezerowa; wtedy dla $w = p_k$: $\underset{(\alpha_k \circ f)}{\alpha_k(f(p_k))} f_k(p_k) \neq 0$, $\lightning$
$\sum \alpha_i \circ f(p_k) f_i(p_k)$

$\leq$ Niech $g \in k_\Sigma$. Dla regularnej wartości p t.że $f^{-1}(p) = \{p_1 \dots p_d\}$

określamy $a_r(p) = r$-ta f. symetryczna od $g(p_1), \dots, g(p_d)$

Wtedy g spełnia $\sum_{k=0}^{d} g^k a_{d-k} (-1)^{d-k} = 0$ na $f^{-1}(\mathrm{Reg})$

każde $g(p_i)$ szacuje się w pobliżu krytycznego z przez $C(z-p)^{-N}$,

więc a_r też, stąd $a_r \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ i stopień g nad $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ jest $\leq d$.

$\square$

AK $1\frac{1}{2}$

Istnieje $g \in k_\Sigma$ że $g(p_i) = w_i$ są parami różne, $w_i \in \mathbb{C}$ (ZAD).

Wtedy $1, g, g^2, \ldots, g^{d-1}$ są lnz / $k_{\mathbb{C}}$:

Jeśli $\sum \alpha_k(f(w)) g(w)^k \equiv 0$, $\alpha_k \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}(z)$

domnażamy przez taką potęgę $z-p$, ~~by któraś α_j stała się~~ że wszystkie α_k stały się w p holomorficzne, a któraś α_j niezerowa. Wtedy, dla $w = p_1, \ldots, p_d$:

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k(p) g(p_i)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k(p) w_i^k = 0$$

↯ z niezerowym wyznacznikiem Vandermonde'a.

A (K2)

Wn

1) stopień przestępy k_Σ nad $\mathbb{C}$ $= 1$

2) $f: \Sigma_1 \xrightarrow{d} \Sigma_2$ stopnia d $\Rightarrow$ $[k_{\Sigma_1} : k_{\Sigma_2}] = d$

$$\begin{tikzcd} \Sigma_1 \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "dd'"'] & \Sigma_2 \arrow[d, "d'"] \\ & \overline{\mathbb{C}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k_{\Sigma_1} & & k_{\Sigma_2} \arrow[ll, "d"'] \\ & k_{\overline{\mathbb{C}}} \arrow[ul, "dd'"] \arrow[ur, "d'"'] & \end{tikzcd}$$

Tw Jeśli K jest skończonym algebraicznym rozszerzeniem $\mathbb{C}(z)$, to $K = k_\Sigma$ dla pewnej zwartej Σ.

D-d Niech $K \simeq \mathbb{C}(z)[W]/(P(W))$

$P(W) \in \mathbb{C}(z)[W]$ nierozkładalny, st. d.

czyścimy mianowniki $\rightsquigarrow$ stowarzyszony w $\mathbb{C}(z)[W]$ wielomian $\in \mathbb{C}[z][W] = \mathbb{C}[z, W]$ bez wspól czynnika w $\mathbb{C}[z]$

budujemy $\hat{\Sigma}(P)$ - powierzchnię Riemanna P

$$\begin{tikzcd} k_{\hat{\Sigma}(P)} & & K \arrow[ll] \\ & \mathbb{C}(z) \arrow[ul, "d"] \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd} \Rightarrow k_{\hat{\Sigma}(P)} = K$$

$\square$

K - ~~rozszerzenie $\mathbb{C}$~~ ciało (u nas: rozszerzenie $\mathbb{C}$) AK3

Def Waluacja K to surjekcja $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, taka że

1) $v^{-1}(\infty) = \{0\}$
2) $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$
3) $v(fg) = v(f) + v(g)$

Pd 1) $K = K_\Sigma$, $p \in \Sigma \rightsquigarrow v_p(f) = \operatorname{ord}_p f$ 2) waluacja p-adyczna

Fakt

1) $z \in \mathbb{C}^\times \Rightarrow v(z) = 0$ $\left[v(z) = v((z^{1/n})^n) = n\, v(z^{1/n}) \in n\mathbb{Z} \text{ – dla każdego } n \right]$
2) $v(f) = v(-f)$
3) $v(f) \neq v(g) \Rightarrow v(f+g) = \min(v(f), v(g))$

$\left[v(f) < v(g) \Rightarrow v(f) = v((f+g)+(-g)) \geq v(f+g) \wedge v(g) \right]$

Tw Σ - zwarta p. Riemanna

$\Sigma \ni p \mapsto v_p \in \mathrm{Val}(K_\Sigma)$ jest bijekcją.

D-d: Niech $v \in \mathrm{Val}\, K_\Sigma$; weźmy $f \in K_\Sigma$ t.że $v(f) = 1$.

$$f: \Sigma \to \overline{\mathbb{C}}, \quad f^*: \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\Sigma)$$

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}(z)$$

$$z \longmapsto f$$

$$P \longmapsto P \circ f$$

Ograniczenie v do $\mathbb{C}(z)$ jest postaci v_{z_0} - ale $v|_{\mathbb{C}(z)}(z) = v(f) = 1$, więc $v|_{\mathbb{C}(z)} = v_0$, $v(P \circ f) = v_0(P)$ dla $P \in \mathbb{C}(z)$

Niech $f^{-1}(0) = \{p_1, \ldots, p_n\}$

zbudujemy funkcję h która rozróżnia $p_1 \ldots p_n$.

Lemat 1.

Każda waluacja $\mathbb{C}(z)$ jest postaci ν_{z_0}, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$.

D-d:

Niech $\nu \in \mathrm{Val}(\mathbb{C}(z))$

1) $\nu(z) \geq 0$.

Wtedy $\nu(P(z)) \geq 0$ dla każdego $P(z) \in \mathbb{C}[z]$,

ale też $\exists P_0 : \nu(P_0(z)) > 0$ – inaczej $\nu : \mathbb{C}(z) \to \{0, \infty\}$

Niech $P_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$

$\exists k : \nu(z - z_k) = n_k > 0$

Wtedy, dla $w \neq z_k$, $\nu(z-w) = \nu(z - z_k + z_k - w) = \min(\underset{>0}{\nu(z-z_k)}, \underset{=0}{\nu(z_k-w)}) = 0$

stąd $\nu(\prod(z - z_j)) = \#\{j \mid z_j = z_k\} \cdot n_k$

cyli $\nu|_{P[z]} = \nu_{z_k} \cdot n_k$ $\nu = \nu_{z_k} \cdot n_k (z\ 3))$, surjektywność $\Rightarrow n_k = 1$

2) $\nu(z) < 0$ – wtedy $\nu(z^{-1}) > 0$ i stosując $\uparrow$ do $\mathbb{C}(w)$, $w = z^{-1}$

dochodzimy do $\nu = \nu_\infty$ $\square$

AK4

Lemat 0

$\exists N \quad \deg D > N \Rightarrow h^0(D) = \deg D - g + 1$

D-d: $\deg D > N \Rightarrow \deg K-D < \deg K - N < 0$, $\underbrace{h^0(K-D)}_{h^1(D)} = 0$. □

Lemat 1

$\exists g \in \mathcal{M}(\Sigma)$, $g(p_1)\neq 0$, $g'(p_1)\neq 0$, ale dla $j>1$ $g(p_j)=g'(p_j)=0$.

D-d: Niech $p_0 \notin f^{-1}(0)$. $D_N := -2p_2-2p_3-\dots-2p_n+Np_0$

Dla dużych N: $h^0(D_N) = \deg D_N - g+1>0$, tzn

~~$\exists g$ tże $(g)+D_N \geq 0$, stąd~~

g(

$$h^0(-p_1+D_N) = h^0(D_N)-1$$

$$h^0(-2p_1+D_N)=h^0(D_N)-2$$

Wtedy

$$H^0(-2p_1+D_N) \subsetneq H^0(-p_1+D_N) \subsetneq H^0(D_N)$$

$$g_1 \notin H^0(-2p_1+D_N),\ g_1 \in H^0(-p_1+D_N) \qquad g_2 \notin H^0(-p_1+D_N),\ g_2 \in H^0(D_N)$$

$g_1(p_1)=0$ $\qquad$ $g_2(p_1)\neq 0$

$g_1'(p_1)\neq 0$

$g=g_2+g_1$ spełnia tezę.

Lemat 3

$\exists h\in\mathcal{M}(\Sigma)$, tże $h(p_i)$ są różne niezerowe, $h'(p_i)\neq 0$.

D-d: Lemat 2: g_i tże $g_i(p_i)=1$, $g_i'(p_i)\neq 0$, $g_i(p_j)=g_i'(p_j)=0$ □

$$h:=\sum_{i=1}^{n} i g_i$$

Niech $n_i = \mathrm{ord}_{p_i} f$; Wtedy $\dfrac{f}{\prod_i (h-h(p_i))^{n_i}}$ jest holomorficzne i niezerowe w każdym p_i

<u>Lemat 4</u> (AK5)

Jeśli $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$, $\forall i$ $g(p_i) \neq 0, \infty$, to $\nu(g) = 0$

<u>D-d:</u>

$$f \Big\downarrow \begin{matrix}\Sigma \\ \\ \mathbb{C}\end{matrix} \qquad g^d - a_1 g^{d-1} + a_2 g^{d-2} - \ldots = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}(z), \cancel{a_i(z) = i\text{-ta}}$$

$a_i \in \mathbb{C}(z)$

$a_i(z) = i$-ta fcja symetryczna od $(g(w) \mid w \in f^{-1}(z))$.

zatem $\rightsquigarrow$ a_i holomorficzne w 0.

$$d\nu(g) = \nu(g^d) \geq \min\{\nu(a_k) + (d-k)\nu(g)\}$$

$$\exists k: \; d\nu(g) \geq \nu(a_k) + (d-k)\nu(g)$$

$$k \cdot \nu(g) \geq \nu(a_k) \geq 0$$

Zatem $\nu(g) \geq 0$; ale też, z tego samego powodu, $\nu(g^{-1}) \geq 0$

zatem $\nu(g) = 0$ $\square$

Stąd mamy
$$\nu\left(\frac{f}{\prod (h - h(p_i))^{n_i}}\right) = 0$$

$$1 = \nu(f) = \sum n_i \nu(h - h(p_i)) \Rightarrow \exists i: \; n_i = 1$$

$\nu(h - h(p_i)) = 1$

zaś dla $j \neq i$

$\nu(h - h(p_j)) = 0$

Weźmy dowolne $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$, $m_j = \mathrm{ord}_{p_j} g$

$$0 = \nu\left(\frac{g}{\prod (h - h(p_j))^{m_j}}\right) = \nu(g) - \sum m_j \nu(h - h(p_j))$$

$$= \nu(g) - m_i, \text{ tzn } \nu(g) = \mathrm{ord}_{p_i} g$$

$$\nu = \nu_{p_i}$$

$\square$