Egzamin z topologii algebraicznej, część I

Jeśli pojawia się polecenie “udowodnij” lub “uzasadnij” lub pytanie “dlaczego” należy podać choć szkicowy dowód. W przeciwnym razie wystarczy odpowiedź. Czas: 60 minut.

1. $Ext(\mathbf{Z}/6, \mathbf{Z}/21) =$

2. $Tor(\mathbf{Z}/6, \mathbf{Z}/21) =$

3. Uzasadnij krótko, że trąbka Borsuka jest ściągalna.

4. Pewna (spójna, zamknięta) 4-wymiarowa rozmaitość M spełnia warunek $H_1(M, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^5$. Możliwie dobrze oszacuj z dołu $\dim H_2(M, \mathbf{R})$.

5. Podaj $H_*(M^n, M^n \setminus \{x\})$ dla punktu x leżącego na brzegu rozmaitości M^n.

6. Podaj $H_*(X, X \setminus \{x\})$ dla $X = \left(\{\binom{t}{0} \mid t \geq 0\} \cup \{\binom{0}{t} \mid t \geq 0\} \cup \{\binom{-t}{-t} \mid t \geq 0\}\right) \times \mathbf{R}$ i $x = \left(\binom{0}{0}, 0\right)$.

7. Udowodnij, że dowolne $f : \mathbf{C}P^7 \to \mathbf{C}P^7$ ma punkt stały.

8. Dlaczego nie istnieje zamknięta 4-wymiarowa rozmaitość o homologiach $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}^2, 0, \mathbf{Z})$?

9. Podaj przykład przestrzeni która jest $K(\pi, 1)$ a której zawieszenie nie jest $K(\pi, 2)$.

10. Uzasadnij, że dowolne odwzorowanie $S^4 \to \mathbf{C}P^2$ jest homotopijne ze stałym.

11. Rozmaitość M^4 o homologiach $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{Z}/2, 0, \mathbf{Z})$ włożono w $\mathbf{R}^9$; niech N będzie jej małym otoczeniem tubularnym w $\mathbf{R}^9$. Opisz $H_*(N, \partial N)$.

12. Opisz pierścień kohomologii $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$.

13. $H_2(\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2, \mathbf{Z}) =$

14. Podaj przykład przestrzeni której wszystkie grupy homotopii znikają ale która nie jest ściągalna.

15. O $f : T^3 \to T^3$ wiadomo, że w pewnej bazie grupy $H_1(T^3)$ odwzorowanie indukowane $f_*\colon H_1(T^3) \to H_1(T^3)$ jest dane macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Podaj liczbę Lefschetza f.