Egzamin z topologii algebraicznej, część II

1. Przestrzeń X powstaje z S^3 przez sklejenie 3 punktów. Wyznacz $\pi_1(X)$ i pierścień kohomologii X.
2. Piąte i zerowe homologie pewnego CW-kompleksu są $\mathbf{Z}$, pozostałe znikają. Udowodnij, że kompleks ten jest homotopijnie równoważny z S^5.
3. Niech $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $T^2 = Id$. Udowodnij, że T ma punkt stały. (Wsk. Rozważ przestrzeń ilorazową.)
4. W tym zadaniu zakładamy, że n jest parzyste. Dla $\phi\colon S^{2n-1} \to S^n$ definiujemy $X_\phi := S^n \cup_\phi D^{2n}$. Niech c będzie generatorem $H^n(X_\phi)$ zaś d generatorem $H^{2n}(X_\phi)$. Wtedy $c \cup c = h(\phi)d$ dla pewnego $h(\phi) \in \mathbf{Z}$.
   [generatory c, d wybieramy zgodnie za standardowymi orientacjami S^n, D^{2n}]
   a) Uzasadnij, że $h(\phi)$ zależy tylko od klasy homotopii ϕ.
   b) Udowodnij, że $h(\phi + \psi) = h(\phi) + h(\psi)$ dla $\phi, \psi \in \pi_{2n-1}(S^n)$. (Wsk. Niech $Y = S^n \cup_{\phi\vee\psi} (D^{2n} \vee D^{2n})$. Zdefiniuj odwzorowania $X_\phi \to Y$, $X_\psi \to Y$, $X_{\phi+\psi} \to Y$ i rozpatrz ich zachowanie na kohomologiach)
   c) Produkt $S^n \times S^n$ można postrzegać jako bukiet $S^n \vee S^n$ z $D^{2n} (\cong D^n \times D^n)$ doklejonym przez pewne odwzorowanie $\phi\colon S^{2n-1} \to S^n \vee S^n$. Niech ψ będzie złożeniem ϕ i odwzorowania $S^n \vee S^n \to S^n$ identycznościowo identyfikującego płatki bukietu. Pokaż, że $h(\psi) = 2$. (Wsk. $S^n \times S^n \to X_\psi$)
   d) Uzasadnij, że grupa $\pi_{2n-1}(S^n)$ jest nieskończona.