Metryki Bergmanna – przykład

$H = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$
$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$

1. Sprawdź, że $f\colon z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ jest holomorficzną bijekcją H na D; wylicz odwzorowanie odwrotne i sprawdź, że ono też jest holomorficzne (mówimy, że f jest *biholomorfizmem*).
   a) Jeśli T jest samosprzężonym endomorfizmem hermitowskiej przestrzeni V, to $f(T)$ jest tejże przestrzeni automorfizmem unitarnym.
   g) Jeśli wiesz, co to jest rzut stereograficzny, zinterpretuj f geometrycznie.
2. Niech $GL_2(\mathbf{C}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc \neq 0\}$. Dla $M \in GL_2(\mathbf{C})$ określamy $Mz := \frac{az+b}{cz+d}$.
   a) Sprawdź, że przekształcenie $x \mapsto Mz$ jest biholomorfizmem $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (aby sprawdzić holomorficzność w $z = \infty$ użyj współrzędnej $w = z^{-1}$ i sprawdź holomorficzność w $w = 0$).
   d) Sprawdź, że $(MN)z = M(Nz)$ (nasz wzór zadaje działanie $GL_2(\mathbf{C})$ na $\overline{\mathbf{C}}$).
   h) Sprawdź, że $MH = H \iff M$ jest proporcjonalna do macierzy rzeczywistej o dodatnim wyznaczniku.
   j) Które M działają trywialnie, tzn. spełniają dla każdego z warunek $Mz = z$?
   s) Znajdź wszystkie $M \in SL_2(\mathbf{R})$ takie że $Mi = i$.
   t) Pokaż, że dla dowolnych $z, z' \in H$ istnieje $M \in SL_2(\mathbf{R})$ takie że $Mz = z'$.

3.* Wyznacz wszystkie biholomorfizmy $f\colon D \to D$, takie że $f(0) = 0$. (Wsk. Rozpatrz funkcję $\frac{f(z)}{z}$.)

4. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że każdy biholomorfizm H jest postaci $z \mapsto Mz$ dla pewnej $M \in SL_2(\mathbf{R})$

Za chwilę pojawią się różne krzywe. Zawsze będziemy zakładać, że są one prostowalne/C^1/kawałkami C^1 (jak wolisz).

5. Dla ciągłej rzeczywistej funkcji $\phi\colon H \to \mathbf{R}_+$ i krzywej $\gamma\colon [0, L] \to H$ określamy $\ell_\phi(\gamma) := \int_\gamma \phi(z)|dz|$. (Przy $\phi \equiv 1$ dostajemy zwykłą długość krzywej. Dla innych ϕ należy myśleć, że H jest mapą prawdziwej przestrzeni, a $\phi(z)$ liczbą opisującą infinitezymalne zniekształcenie odległości przez mapę w punkcie z.) Uzasadnij, że istnieje jedyna (z dokładnością do mnożenia przez stałą) funkcja ϕ, taka że dla każdego biholomorfizmu $f\colon H \to H$ i każdej krzywej γ w H zachodzi $\ell_\phi(\gamma) = \ell_\phi(f \circ \gamma)$. Wyznacz tą funkcję (z normalizacją $\phi(i) = 1$); będziemy ją oznaczać literką h.
6. Dla $z, w \in H$ określmy $d_h(z, w) = \inf\{\ell_h(\gamma) \mid \gamma\colon [0, 1] \to H, \gamma(0) = z, \gamma(1) = w\}$ (jest to *odległość hiperboliczna* punktów z, w).
   a) Oblicz $d_h(i, 7i)$. Wskaż krzywą realizującą infimum (jest to tzw. *geodezyjna hiperboliczna*).
   b) Zauważ, że d_h jest metryką na H.
   c) Zauważ, że biholomorfizmy H są izometriami tej metryki.
   d) Korzystając z a) i c) znajdź dużo różnych geodezyjnych hiperbolicznych. Narysuj ich obrazy.
   e) Geodezyjne hiperboliczne to hiperboliczny wariant prostej. Przetestuj w H aksjomaty Euklidesa.