

## ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 10C

CÓŻ NIEWŁAŚCIWEGO JEST W CAŁKACH NIEWŁAŚCIWYCH?

PRZYKŁAD A. Licząc pole półsfery o promieniu 2, przejście do układu biegunowego pozwoliło zgrabnie znaleźć funkcję pierwotną, ALE...

nie zauważamy, że wcześniej robimy błąd:

$$\dots = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d\omega = \dots$$

Otóż dla punktów okręgu  $x^2 + y^2 = 4$  mamy 'zera w mianownikach'!

Zastąpienie nierówności słabej ostrą:

$$\dots = \iint_{x^2+y^2 < 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d\omega = \dots$$

nie rozwiązuje problemu. Bowiem dla elementów podziału wnętrza koła  $x^2 + y^2 < 4$ , stykających się z brzegiem, kres górny funkcji (podcałkowej) jest równy  $+\infty$ , co (z definicji całki) powoduje, że całka górna jest równa  $+\infty$ . Po prostu ta funkcja nie jest całkowna w sensie przyjętej definicji.

Ta całka, jest zatem całką niewłaściwą, której wartość obliczymy przybliżając całkę całkami 'po obszarach coraz lepiej przybliżających' wnętrze koła:

$$\begin{aligned} \dots &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d\omega = \lim_{b \rightarrow 2^-} \iint_{x^2+y^2 \leq b^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d\omega = \text{i dalej ukl. bieg.} \\ &= \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{2}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r dr d\varphi = \lim_{b \rightarrow 2^-} 2\pi \left( -2\sqrt{4-r^2} \right)_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 2^-} 2\pi \left( -2\sqrt{4-b^2} + 2\sqrt{4-0^2} \right) = 8\pi. \quad \square \end{aligned}$$

PRZYKŁAD B. W poniższej całce niewłaściwej zamiast po kole całkujemy po pierścieniach kołowych omijających  $(0, 0)$ , przybliżających owe koło:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\omega &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\omega = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \int_a^{\sqrt{3}} \frac{1}{r} \cdot r dr d\varphi = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\pi(\sqrt{3} - a) = 2\pi\sqrt{3}. \quad \square \end{aligned}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2} d\omega = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}} d\omega = \dots$$

Doprecyzowanie zwrotu 'po obszarach coraz lepiej przybliżających' nie jest proste. Ograniczymy się do przykładów (powinny wystarczyć do wyrobienia intuicji).

PRZYKŁAD C.

W poniższej całce niewłaściwej trzeba coraz lepiej wypełniać kwadrat  $[0, 4]^2$  omijając osie układu współrzędnych, np. tak:

$$\begin{aligned} \iint_{[0,4]^2} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{y}} d\omega &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \iint_{[a,4] \times [b,4]} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{y}} d\omega = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \int_a^4 \int_b^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} dy dx = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left( \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} \right)_b^4 dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2} \right) \cdot \int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2} \right) \cdot (2\sqrt{x})_a^4 = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 0^+}} \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2} \right) \cdot 2(\sqrt{4} - \sqrt{a}) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{0} \right) \cdot 2(\sqrt{4} - \sqrt{0}) = 12\sqrt[3]{2}. \quad \square \end{aligned}$$

PRZYKŁAD D.

W poniższej całce niewłaściwej najwygodniej będzie wypełniać płaszczyznę coraz większymi kołami (tak, by zgrabnie użyć współrzędne biegunowe):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} d\omega &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} d\omega = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{1+r^2} \cdot r dr d\varphi = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^R d\varphi = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(\ln(1+R^2) - \ln 1) = +\infty. \end{aligned}$$

Mówimy, że (ta) całka niewłaściwa jest rozbieżna (do  $+\infty$ ).  $\square$

PRZYKŁAD E. 
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} d\omega = \lim \dots$$

PRZYKŁAD F. (śliczny!) Aby obliczyć ważną całkę  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ,

wystarczy na dwa sposoby obliczyć całkę  $J = \iint_{[0,+\infty]^2} e^{-x^2-y^2} d\omega = \dots$

Zadziwiająca.