

## ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI 12.B

$f(x, y)$  nazywamy potencjałem pola wektorowego  $\vec{F} = (P, Q)$ , gdy  $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

$f(x, y, z)$  nazywamy potencjałem pola wektorowego  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , gdy  $\vec{F} = \text{grad}(f)$ .

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie  $f$ , spróbuj:

- a)**  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$     **b)**  $\vec{F}(x, y) = (y, x)$     **c)**  $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$   
**d)**  $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$     **e)**  $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y + y^3)$     **f)**  $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x)$   
**g)**  $\vec{F}(x, y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$     **h)**  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$   
**i)**  $\vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$     **j)**  $P(x, y) = y^2e^{xy}$ ,  $Q(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$   
**k)**  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$     **l)**  $P = yz$ ,  $Q = xz$ ,  $R = xy$   
**m)**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$     **n)**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$

**Odp.** **a)**  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , **d)** brak, **h)**  $f(x, y, z) = x^2yz + z$ , **n)**  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz$

**TWIERDZENIE.** Gdy  $\vec{F} = \text{grad} f$  i  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Gamma$  jest gładką parametryzacją łuku  $\Gamma$  skierowanego od  $A = \vec{r}(a)$  do  $B = \vec{r}(b)$ , to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

**PRZYKŁAD.**

Gdy  $\vec{F}(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$ ,  $\Gamma$  krzywa od  $A = (5, 2)$  do  $B = (9, 1)$ , to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{f(x,y)=x^2y^2}^{\substack{f(x,y)=x^2y^2 \\ F=\text{grad}f}} = f(B) - f(A) = 9^2 \cdot 1^2 - 5^2 \cdot 2^2 = -19$$

**PRZYKŁAD.**

Gdy  $\vec{F}(x, y) = (y \cos xy, x \cos xy)$  i  $\Gamma$  krzywa od  $A = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{3})$  do  $B = (\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ ,

to  $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \dots$

**Zadanie.**

Niech  $f, g, h$  będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka  $\int_{\Gamma} f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$  nie zależy od drogi  $\Gamma$  (zależy tylko od początku i końca).

**Dowód.**

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_a^b P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt =$$

$$= [f(x(t), y(t))]_a^b = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad \square$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech  $K$  będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwnieżygarowo) ograniczającą obszar  $\Omega$  bez 'dziur' i niech  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  będzie polem wektorowym określonym na  $\Omega$ , gdzie  $P, Q$  są klasy  $C^1$ . Wtedy

$$\int_K P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\omega.$$

PRZYKŁAD 1. Niech  $\vec{F}(x, y) = (\cos e^x - y, 3x + \sin(y^3 + y))$ ,  $K = \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$  skierowany dodatnio. Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{\partial(3x+\sin(y^3+y))}{\partial x} - \frac{\partial(\cos e^x - y)}{\partial y} d\omega = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 3 - (-1) d\omega = 4 \cdot \pi 2^2$$

UWAGA. Ten sam wynik otrzymamy dla  $\vec{F}(x, y) = (-y + \cos ik(x), 3x + jakiesik(y))$ .

PRZYKŁAD 2. Dla  $\vec{F}(x, y) = (x^4 + y, 4x + \sin y^2)$ ,  $K = \{(x, y); x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$  skierowanej od  $(2, 0)$  do  $(-2, 0)$ .

Tu nie można wprost zastosować tw.G., bo  $K$  nie ogranicza żadnego obszaru. Można ją uzupełnić, np. odcinkiem od  $A = (-2, 0)$  do  $B = (2, 0)$ . Łącznie te dwie krzywe ograniczają półkole  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ . Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\omega,$$

skąd

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} &= \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} d\omega - \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \\ &= \iint_{\Omega} 4 - 1 d\omega - \int_{-2}^2 (t^4 + 0) \cdot 1 + (4t + \sin 0) \cdot 0 dt = \quad \text{tu } AB : \begin{cases} x=t, y=0, \\ t \in [-2, 2] \end{cases} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \pi 2^2 - \left( \frac{1}{5} t^5 \right)_{-2}^2 = 6\pi - \frac{64}{5} \quad \square \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3.  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ ,  $\Omega = \{(x, y); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$ ,

(tu brzeg  $\Omega$  to DWA okręgi; JAK tu określić skierowanie???)

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \dots$$