

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, LISTA 1.

1. Jaki odcinek jest opisany poniższą parametryzacją? Jaka ma długość?

- a) $G(t) = (|t| + 1, 3|t| + 4)$, $|t| \leq 4$ b) $H(s) = (|s|, 3|s| + 1)$, $s \in [1, 5]$
 c) $x = \sin t + 1$, $y = 2 \sin t + 3$, $\pi \leq t \leq 4\pi$ d) $x = |t|$, $y = 2|t|$, $z = 3|t|$, $t^2 \leq 1$
 e) $x = 2 - 3t$, $y = -4t$, $0 \leq t \leq 12$ f) $x = e^t$, $y = e^{4+t} + 3$, $0 \leq t \leq \log 5$

2. Zaznacz linie opisane parametrycznie (wyznacz zbiory wartości funkcji):

- a) $x = t$, $y = -\sqrt{4 - t^2}$, $t \in [-2, 1]$ b) $x = -\sqrt{4 - t^2}$, $y = 4 - t^2$, $t \in [-2, 2]$
 c) $x = 3 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$
 d) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$
 e) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$; jaką ma długość?
 f) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$
 g) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$
 h) $x = \cos(2\pi t)$, $y = \sin(2\pi t) + 2[t + 2]$, $t \in [-2, 1]$, gdzie $[s]$ – część całkowita s
 i) $x = 2t + 3$, $y = 3t + 4$, $z = 4t + 5$, $t \in [-1, 3]$; jaką ma długość?
 j) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [0, 2]$; jaką ma długość?
 k) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [-1, 2]$

3. Podaj opis jakiejś wędrowki: a) po linii $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4y, x \geq 1\}$
 b) po linii $L = \{(x, |x|) : x \in [-1, 2]\}$ b') $L' = \{(x, y) : y = ||x - 1| - 2|, |x| \leq 5\}$
 c) po $((-\infty, 0] \times \mathbb{R}) \cap K$, gdzie K jest okręgiem o środku $(1, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$
 c') $r = 2$ c'') $r = \sqrt{5}$ d) po brzegu (jakiegoś) kwadratu

4. Zbiór wartości funkcji $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

5. Wzór $M(t) = (5 \cos(\pi/2 - 2\pi t), 5 \sin(\pi/2 - 2\pi t))$, $t \in [0, 24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.

- a) Opisz ruch końca małej wskazówki o długości 3
 b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu).
 c) Opisz ruch końca sekundnika o długości 3.
 d*) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 7 minut na dobę?

6. Oblicz długość (co najmniej) jednej z linii:

$$\begin{aligned} K : & \quad x = \cos\left(\cos(t) - \frac{\pi}{2}\right) \quad y = \sin\left(\sin(t) - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi], \\ L : & \quad x = \cos\left(\sin(t) - \frac{\pi}{2}\right) \quad y = \sin\left(\cos(t) - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi], \\ M : & \quad x = \cos\left(\sin(t) - \frac{\pi}{2}\right) \quad y = \sin\left(\sin(t) - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

7. W ruchu: $x_t = \cos t$, $y_t = \sin t$, $z_t = 1 + \sin 2t$; $t \in \mathbb{R}_+$ szybkość jest zmienna.

- a) Kiedy jest największa? Kiedy jest najmniejsza?
 b**) Czy w tym ruchu podjazd trwa dłużej od zjazdu (jak w realu)?

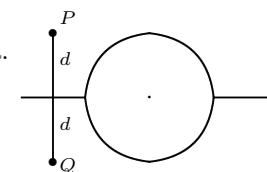
Jeśli nie, to zmodyfikuj opis ruchu tak, by był (nieco) bardziej realny.

ZADANIE DODATKOWE

Na rysunku obok widać z góry... pana Jo (Chińczyka w kapeluszu), który jedzie na rowerze i na bagażniku wiezie drąg PQ długości $2d = 1$.

8*. Zakładamy, że pan Jo jedzie po wykresie f-cji $f(x) = x^2$, dokładnie: środek drąga przemieszcza się nad wykresem.

- a) Wyznacz równania linii, które wykreślają końce drąga.
 b) Powtórz a), gdy $d = 1$ oraz gdy $d = 0,3$.
 c) Czy te linie są wykresami funkcji (z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$)?
 (Zobacz w komputerze.)



8**. Zadanie 8* nie jest sformułowane precyzyjnie (jednoznacznie). Doprecyzuj je.