DUŻO (za dużo) zadań o wnętrzach, podprzestrzeniach i homeomorfizmach.

Zad. 0. Rozważamy podzbiory przestrzeni **euklidesowych** $\mathbb{R}^n$.

a) Dla $A=[0,1)\cup\mathbb{Z}$, $B=(1,4]\cap\mathbb{Q}$, $C=(3,5)\setminus\mathbb{Q}$ podaj:

$\mathrm{Int}\,A=$? $\overline{A}=$? $\mathrm{Bd}\,A=$? $\mathrm{Bd}\left(\overline{\mathrm{Int}\,A}\right)=$? $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{Bd}\,A}\right)=$?

$\mathrm{Int}\,B$, $\overline{B}$, $\mathrm{Bd}\,B$, $\overline{\mathrm{Int}\,B}$, $\mathrm{Int}\,\overline{B}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,B)$,

$\mathrm{Int}\,C$, $\overline{C}$, $\mathrm{Bd}\,C$, $\overline{\mathrm{Int}\,C}$, $\mathrm{Int}\,\overline{C}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,C)$,

$\mathrm{Int}\,(A\cap B)$, $(\mathrm{Int}\,A)\cap(\mathrm{Int}\,B))$, $\mathrm{Bd}\,(C\setminus A)$, $\overline{\mathrm{Int}\,(B\cup C)}$, $\mathrm{Int}\,\overline{B\cup C}$

b) Dla $A=\{(x,y):0<y\le|x|,\ x\in[-1,1)\}$, $B=\{(x,y):0\le y\le|x|<1\}$ podaj:

$\mathrm{Int}\,A$, $\overline{A}$, $\mathrm{Bd}\,A$, $\overline{\mathrm{Int}\,A}$, $\mathrm{Int}\,\overline{A}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,A)$,

$\mathrm{Int}\,B$, $\overline{B}$, $\mathrm{Bd}\,B$, $\overline{\mathrm{Int}\,B}$, $\mathrm{Int}\,\overline{B}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,B)$,

$\mathrm{Int}\,(A\setminus B)$, $\mathrm{Int}\,(B\setminus A)$, $\mathrm{Bd}\,(B\setminus A)$, $\mathrm{Bd}\,(A\setminus B)$, $\overline{\mathrm{Int}\,(A\cap B)}$, $\mathrm{Int}\,\overline{A\cap B}$

Zad. 0'. Rozważamy podzbiory $\mathbb{R}^2$ **z topologią wyznaczoną przez metrykę centrum**.

Dla $A=\{(x,y):0<y\le|x|,\ x\in[-1,1)\}$, $B=\{(x,y):0\le y\le|x|<1\}$ podaj:

$\mathrm{Int}\,A$, $\overline{A}$, $\mathrm{Bd}\,A$, $\overline{\mathrm{Int}\,A}$, $\mathrm{Int}\,\overline{A}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,A)$,

$\mathrm{Int}\,B$, $\overline{B}$, $\mathrm{Bd}\,B$, $\overline{\mathrm{Int}\,B}$, $\mathrm{Int}\,\overline{B}$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}\,B)$,

$\mathrm{Int}\,(A\setminus B)$, $\mathrm{Int}\,(B\setminus A)$, $\mathrm{Bd}\,(B\setminus A)$, $\mathrm{Bd}\,(A\setminus B)$, $\overline{\mathrm{Int}\,(A\cap B)}$, $\mathrm{Int}\,\overline{A\cap B}$

Zad. 1. Niech $X=(0,1]\cup\{2+(-1)^n+\frac{1}{2^n} : n\in\mathbb{N}^+\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni **euklidesowej** $\mathbb{R}=Y$
Wskaż (o ile istnieje) taki zbiór $A\subset X$, że:

a) A jest otwarty w X i jest otwarty w Y
b) A jest otwarty w X i nie jest otwarty w Y
c) A nie jest otwarty w X i jest otwarty w Y
d) A nie jest otwarty w X i nie jest otwarty w Y
a') A jest domknięty w X i jest domknięty w Y
b') A jest domknięty w X i nie jest domknięty w Y
c') A nie jest domknięty w X i jest domknięty w Y
d') A nie jest domknięty w X i nie jest domknięty w Y

Zad. 1'. Niech $X=(0,1]\times[2,3]$ będzie podprzestrzenią przestrzeni **euklidesowej** $\mathbb{R}^2=Y$.
Wskaż (o ile istnieje) taki zbiór $A\subset X$, że a)-d), a')-d') z zadania 1.

Zad. 2. Rozważamy podprzestrzenie X przestrzeni **euklidesowych** $\mathbb{R}^n$.
Dla $Z\subseteq X\subseteq\mathbb{R}$ symbole $\mathrm{Int}_X Z$, $\mathrm{Bd}_X Z, \overline{Z}^X$ oznaczają wnętrze, brzeg i domknięcie Z w przestrzeni X (z topologią dziedziczoną z $\mathbb{R}^n$).

a) Niech $X=([0,2]\times[0,2])\setminus((0,2)\times(1,2))$, $A=\{0\}\times[0,2]$, $B=(0,1)\times[0,1]$, $C=[0,1)\times(0,1]$.
Podaj:

$\mathrm{Int}_X A=$??? $\overline{A}^X=$??? $\mathrm{Bd}_X A=$???

$\mathrm{Int}_X B=$ $\overline{B}^X=$ $\mathrm{Bd}_X B=$

$\mathrm{Int}_X C=$ $\overline{C}^X=$ $\mathrm{Bd}_X C=$

b) Niech $X=(\mathbb{Q}\cap[-4,-2))\cup[-2,0]\cup\mathbb{N}$, $A=(-1,3]\cap X$, $B=(-3,-1)\cap X$.
Podaj: $\mathrm{Int}_X A$, $\overline{A}^X$, $\mathrm{Bd}_X A$, $\mathrm{Int}_X B$, $\overline{B}^X$, $\mathrm{Bd}_X B$.

c) Niech $X=(-1,1]\cup([2,4)\setminus\mathbb{Q})\cup([5,7]\cap\mathbb{Q})$, $A=(0,3]\cap X$, $B=(3,6)\cap\mathbb{Q}\cap X$.
Podaj: $\mathrm{Int}_X A$, $\overline{A}^X$, $\mathrm{Bd}_X A$, $\mathrm{Int}_X B$, $\overline{B}^X$, $\mathrm{Bd}_X B$.

d) Niech $U\subseteq\mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$.
Czy dla każdego $C\subseteq U$ zachodzi $\mathrm{Int}_U C=(\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} C)\cap U$? (Uzasadnij odpowiedź.)

e) Niech $F\subseteq\mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$.
Czy dla każdego $D\subseteq F$ zachodzi $\mathrm{Bd}_F D=(\mathrm{Bd}_{\mathbb{R}} D)\cap F$? (Uzasadnij odpowiedź.)

Zad. 3. Rozważamy podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$ **z topologią euklidesową**.
Czy podana podprzestrzeń jest homeomorficzna z jakąś podprzestrzenią Y przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^1$?

a)
$A = \{(0,0)\} \cup \left\{\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}^+\right\}$
Wsk. ???

b) $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \times [0,1)$, **Wsk.** ???

c) $C = \left\{\left(-\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \{(x,x) : x \in [0,1]\}$, **Wsk.** ???

d) $D = \left\{\left(-\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \left\{(x, |x|) : x \in [-1,1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}\right\}$ **Odp.**
???

Uwaga: Proszę uzasadniać odpowiedzi 'Tak' (podając odpowiednią podprzestrzeń Y p. euklidesowej $\mathbb{R}^1$ i wskazując homeomorfizm). Uzasadnienia odpowiedzi 'Nie' są (nieco) trudniejsze
(i w niektórych przykładach nie wprowadzono jeszcze pojęć, którymi można je uzasadnić).

Zad. 4. Rozważamy podzbiory $\mathbb{R}^2$ **z topologią wyznaczoną przez metrykę centrum**.
Czy podana podprzestrzeń jest homeomorficzna z jakąś podprzestrzenią Y przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^1$?

a) $A = \{(x,y) : y = |x|,\ x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{(x,1) : x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}$, **Wsk.** ???

b) $B = \{(x,y) : y = |x|,\ x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\} \cup \{(x,1) : x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}\}$, **Wsk.** ???

c) $C = \{(x,y) : y = |x|,\ x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}\} \cup (\{0\} \times [0,1])$.

Uwaga: Proszę uzasadniać odpowiedzi 'Tak' (podając odpowiednią podprzestrzeń Y p. euklidesowej $\mathbb{R}^1$ i wskazując homeomorfizm). Uzasadnienia odpowiedzi 'Nie' są (nieco) trudniejsze
(i w niektórych przykładach nie wprowadzono jeszcze pojęć, którymi można je uzasadnić).