**Przed Kartkówką ratunkową**

**Zad. 0.** Dla $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ niech

$$A_P = P \cup (1,2) \cup \{3+\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(4+\frac{1}{2^{n+1}}, 4+\frac{1}{2^n}] \subseteq \mathbb{R}.$$

**a)** Podaj wszystkie takie $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}$, że $A_P$ jest zwarte.

???

**b)** Podaj wszystkie składowe zbiorów: $A_{\{1,2,3,4,5\}}$, $A_{\{1,3\}}$, $A_{\emptyset}$, $A_{\{1,3\}}$, $A_{\{1,2,3,4\}} \setminus A_{\{1,3\}}$.

???

**c)** Podaj wszystkie takie $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}$, że każda składowa $A_P$ jest zwarta.

???

**d)** Czy $A_{\{1,2,3,4\}}$ jest homeomorficzny z $A_{\{1,2,3,4,5\}}$ ?

???

**d')** Czy $A_{\{1,2,3\}}$ jest homeomorficzny z $A_{\{1,2,3,4\}}$ ?

???

**d'')** Podaj wszystkie takie pary $\langle P', P''\rangle \in \{1,2,3,4,5\}^2$, że $A_{P'}$ jest homeomorficzny z $A_{P''}$.

???

**e)** Czy istnieje ciągła surjekcja z $A_{\{2,3,4\}}$ na $A_{\{2,3\}}$ ?

???

**e')** Czy istnieje ciągła surjekcja z $A_{\{2,3\}}$ na $A_{\{2,3,4\}}$ ?

???

**e'')** Podaj wszystkie takie pary $\langle P', P''\rangle \in \{1,2,3,4,5\}^2$, że istnieje ciągła surjekcja z $A_{P'}$ na $A_{P''}$.

???

**Zad. 1.** Podaj wszystkie takie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, że podprzestrzeń $X$ przestrzeni **euklidesowej** $\mathbb{R}^2$ jest spójna, gdy:

**a)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \sin\frac{1}{x},\ x \in (0,2)\} \cup \{\langle 2,a\rangle\}$

???

**b)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \sin\frac{1}{x},\ x \in (0,2)\} \cup \{\langle 0,a\rangle\}$

???

**c)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = x\cdot\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0\} \cup \{\langle 0,a\rangle\}$

???

**d)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x},\ x \neq 0\} \cup \{\langle 0,a\rangle\}$ .

???

**e)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \frac{1}{x},\ x \neq 0\} \cup (\{a\} \times \mathbb{R})$

???

**f)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0\} \cup (\mathbb{Q} \times [a,+\infty))$

???

**g)** $X = \{\langle x,y\rangle : y = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0\} \cup (\mathbb{R} \times (\mathbb{Q} \cap [a,+\infty))$

???

**Zad. 2.** W tym zadaniu '$\aleph_0$-przeliczalnie' oznacza: 'przeliczalnie, ale nie skończenie wiele'.

**a)** Czy istnieje taka podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, która ma nieprzeliczalnie wiele składowych, które mają $\aleph_0$-przeliczalnie wiele punktów?

???

**b)** Czy istnieje taka podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, która ma $\aleph_0$-przeliczalnie wiele składowych, które mają nieprzeliczalnie wiele punktów?

???

**c)** Czy istnieje taka podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, która ma nieprzeliczalnie wiele składowych, które mają nieprzeliczalnie wiele punktów?

???

**b$^1$)** Czy istnieje taka zwarta podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^1$, która ma $\aleph_0$-przeliczalnie wiele składowych, które mają nieprzeliczalnie wiele punktów?

???

**c$^1$)** Czy istnieje taka zwarta podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^1$, która ma nieprzeliczalnie wiele składowych, które mają nieprzeliczalnie wiele punktów?

???

**c$^2$)** Czy istnieje taka zwarta podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$, która ma nieprzeliczalnie wiele składowych, które mają nieprzeliczalnie wiele punktów?

???

**Zad. 3.** Rozważamy $X = \{\langle x, \frac{x}{n}\rangle : x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^+\}$ z metryką centrum i $Y = [0,+\infty)$ z metryką euklidesową.

**a)** Czy istnieje ciągła surjekcja $f : X \to Y$ ?

???

**b)** Czy istnieje ciągła surjekcja $g : Y \to X$ ?

???

**Zad. 4.** Rozważamy $X = \{\langle x, \frac{1}{n}(1-x)\rangle : x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^+\}$ z metryką centrum i $Y = [0,+\infty)$ z metryką euklidesową.

**a)** Czy istnieje ciągła surjekcja $f : X \to Y$ ?

???

**b)** Czy istnieje ciągła surjekcja $g : Y \to X$ ?

???

**Zad. 5.** Rozważamy przestrzenie metryczne $X_1,\ X_2$.
Pokazać, że rzut $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ przekształca zbiory otwarte w $X_1 \times X_2$ na zbiory otwarte w $X_1$.

**Zad. 6*.** Rozważamy przestrzeń **euklidesową** $\mathbb{R}$. Niech
$A_1 = \mathbb{Z} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^+} [m + \frac{1}{4}, m + \frac{3}{8}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (n + \frac{1}{2}, n + \frac{5}{8})$ .
Znaleźć taką podprzestrzeń $A_2 \subseteq \mathbb{R}$, która ma wszystkie trzy własności:

**(i)** $A_1,\ A_2$ nie są homeomorficzne oraz

**(ii)** istnieje ciągła bijekcja $f : A_1 \to A_2$ oraz
**(iii)** istnieje ciągła bijekcja $g : A_2 \to A_1$.

**Uwaga:** Oprócz podania $A_2$ proszę wskazać bijekcje $f, g$ oraz uzasadnić (i).

**Odp. (częściowa)** ???