1 Zadanie 5

Oznaczmy

$$p = 3(x^4 + y^2 + z^2) - 2(x^2y + yz + zx^2) - 6$$

Jeśli równanie $p = 0$ daje się rozwiązać względem z dla każdego (x, y) z pewnego otoczenia (x_0, y_0) to w punkcie (x_0, y_0, z_0) (gdzie z_0 to odpowiednie rozwiązanie) na pewno x nie ma ekstremum lokalnego. A więc jeśli w (x_0, y_0, z_0) jest ekstremum lokalne to $\partial_z p(x_0, y_0, z_0) = 0$ (w przeciwnym razie rozwiązanie istniałoby na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej). Podobnie rozpatrując zmienne (x, z) widziemy że $\partial_y p(x_0, y_0, z_0) = 0$. Tak więc ekstremum lokalne jest możliwe tylko w punktach rozwiązujących układ równań $p = 0, \partial_y p = 0, \partial_z p = 0$. Rozwiązanie za pomocą komputera:

```
(1) -> p := 3*(x^4 + y^2 + z^2) - 2*(x^2*y + y*z + z*x^2) - 6

           2                 2        2      2      4
   (1)  3 z  + (- 2 y - 2 x )z + 3 y  - 2 x y + 3 x  - 6
                                                   Type: Polynomial(Integer)
(2) -> py := D(p, y)

                          2
   (2)  - 2 z + 6 y - 2 x
                                                   Type: Polynomial(Integer)
(3) -> pz := D(p, z)

                        2
   (3)  6 z - 2 y - 2 x
                                                   Type: Polynomial(Integer)
(4) -> solve([p, py, pz])

             2       2
            x       x    4
   (4)  [[z = --, y = --, x  - 3 = 0]]
             2       2
                       Type: List(List(Equation(Fraction(Polynomial(Integer)))))
```

Nie jest to całkiem jawne rozwiązanie, musimy rozwiązać równanie $x^4 - 3 = 0$. To równanie ma dwa rozwiązanie rzeczywiste $x = 3^{1/4}$ oraz $x = -3^{1/4}$. Czyli dostajemy $(3^{1/4}, 3^{1/2}/2, 3^{1/2}/2)$ i $(-3^{1/4}, 3^{1/2}/2, 3^{1/2}/2)$ jako możliwe rozwiązania.

Bez komputera, odejmując trzecie równanie od drugiego dostaniemy $6y - 2z - (6z - 2y) = 0$, czyli $y = z$. Podstawiając do drugiego równania mamy

$$4y - 2x^2 = 0$$

czyli

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Podstawiając y i z do pierwszego równania otrzymamy $x^4 - 3 = 0$, czyli to samo co wyliczył komputer.

Zauważmy teraz że zbiór rozwiązań równania $p = 0$ jest ograniczony. Mianowicie, na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną mamy

$$p(x, y, z) \geqslant 3(x^4 + y^2 + z^2) - (x^4 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^4) - 6$$

$$= x^4 + y^2 + z^2 - 6.$$

Czyli $p(x, y, z) = 0$ implikuje

$$x^4 + y^2 + z^2 \leqslant 6$$

a więc x, y i z są ograniczone. Oczywiście $\{(x, y, z) : p(x, y, z) = 0\}$ jest zbiorem domkniętym, a więc jako domknięty i ograniczony podzbiór $\mathbb{R}^3$ jest on zbiorem zwartym. Na tym zbiorze x jako funkcja ciągła osiąga minimum i maksimum. Ale $(3^{1/4}, 3^{1/2}/2, 3^{1/2}/2)$ jest jedynym punktem gdzie nie wykluczyliśmy maksimum, więc w tym punkcie maksimum jest osiągnięte. Podobnie, w punkcie $(-3^{1/4}, 3^{1/2}/2, 3^{1/2}/2)$ jest minimum.

Uwaga: Alternatywny dowód ograniczoności powierzchni zapisuje $p + 6$ jako sumę kwadratów. Pozwala to bezpośrednio znaleźć maksimum i minimum x co pokazuje że punkty wyznaczone z warunków na pochodne są faktycznie ekstramami lokalnymi (bo są ekstramami globalnymi).

2 Zadanie 1

To zadanie jest bardziej skomplikowane. Postępując jak w zadaniu 5 mamy

$$p = x^4 + y^4 - 12x^2y^2 + z^2 - 2z$$

i trzeba rozwiązać układ $p = 0, \partial_x p = 0, \partial_z p = 0$.

Używając komputer mamy

```
(6) -> p := x^4 + y^4 - 12*x^2*y^2 + z^2 - 2*z

           2           4       2 2    4
   (6)  z  - 2 z + y  - 12 x y  + x
                                                  Type: Polynomial(Integer)
(7) -> px := D(p, x)

                  2       3
   (7)  - 24 x y  + 4 x
                                                  Type: Polynomial(Integer)
(8) -> pz := D(p, z)

   (8)  2 z - 2
                                                  Type: Polynomial(Integer)
(9) -> sl := solve([p, px, pz])

   (9)
                                                                2
   [[z = 1, y = 1, x = 0], [z = 1, y = - 1, x = 0], [z = 1, y  + 1 = 0, x = 0],
                2    2          4
    [z = 1, 6 y  - x  = 0, 35 x  + 36 = 0]]
                        Type: List(List(Equation(Fraction(Polynomial(Integer)))))
```

Są cztery rozwiązania nad liczbami zespolonymi. W trzecie i czwarte rozwiązanie nie są zupełnie jawne, w przypadku trzeciego rozwiązania trzeba by rozwiązać równanie $y^2 + 1 = 0$, ale to równanie nie ma rzeczywistych rozwiązań. Podobnie, w czwartym rozwiązaniu trzeba by rozwiązać równanie $35x^4 + 36 = 0$ i znowu to równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych. A więc pozostają dwa rozwiązania rzeczywiste. Podstawiając do pochodnej po y widzimy że jest ona niezerowa:

```
(13) -> py := D(p, y)

              3       2
   (13)  4 y  - 24 x y
                                                     Type: Polynomial(Integer)
(14) -> eval(py, sl(1))

   (14)  4
                                           Type: Fraction(Polynomial(Integer))
(15) -> eval(py, sl(2))

   (15)  - 4
                                           Type: Fraction(Polynomial(Integer))
```

A więc w otoczeniu każdego z dwu rowiązań y daje się wyrazić jako funkcję klasy C^1 zmiennych x i z. Liczymy pochodne y po x i z:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial_x p}{\partial_y p} = \frac{6\ x\ y^2 - x^3}{y^3 - 6\ x^2\ y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial_z p}{\partial_y p} = \frac{-z + 1}{2\ y^3 - 12\ x^2\ y}.$$

Drugie pochodne liczymy ze wzorów typu:

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x \partial x} = \partial_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\partial_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

W jeśli $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ to wzór wyżej się upraszcza do

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x \partial x} = \partial_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \partial_x \left(-\frac{\partial_x p}{\partial_y p}\right)$$

$$= -\frac{(\partial_x \partial_x p)(\partial_y p) - (\partial_x p)(\partial_x \partial_y p)}{(\partial_y p)^2} = -\frac{\partial_x \partial_x p}{\partial_y p}$$

Po wyliczeniu w punkcie $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ wychodzi że Hesian H to:

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

czyli tu mamy punkt siodłowy. Pododnie dla $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ mamy

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i też jest punkt siodłowy. A więc nie ma ekstremów lokalnych.

Używając komputera obliczenia są łatwe, ale nie używając uproszczenia wyniki są dość duże:

```
yx := -px/py


              2     3
         6 x y  - x
```

```
   (40)  -----------
           3        2
          y  - 6 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
yz := -pz/py


            - z + 1
   (41)  --------------
            3         2
         2 y  - 12 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
yxx := D(yx, x) + D(yx, y)*yx


            8       2 6        4 4       6 2      8
         6 y  - 39 x y  - 384 x y  - 39 x y  + 6 x
   (42)  ------------------------------------------
              9       2 7        4 5        6 3
             y  - 18 x y  + 108 x y  - 216 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
yxz := D(yx, z) + D(yx, y)*yz


               4       3 2      5          4       3 2      5
         (6 x y  + 33 x y  + 6 x )z - 6 x y  - 33 x y  - 6 x
   (43)  ----------------------------------------------------
                    9       2 7        4 5        6 3
                 2 y  - 36 x y  + 216 x y  - 432 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
yzx := D(yz, x) + D(yz, y)*yx


               4       3 2      5          4       3 2      5
         (6 x y  + 33 x y  + 6 x )z - 6 x y  - 33 x y  - 6 x
   (44)  ----------------------------------------------------
                    9       2 7        4 5        6 3
                 2 y  - 36 x y  + 216 x y  - 432 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
yzz := D(yz, z) + D(yz, y)*yz


   (45)
         2      2  2       2       2        6       2 4          4      2      2
   (- 3 y  + 6 x )z  + (6 y  - 12 x )z - 2 y  + 24 x y  + (- 72 x  - 3)y  + 6 x
   -----------------------------------------------------------------------------
                          9       2 7        4 5        6 3
                       4 y  - 72 x y  + 432 x y  - 864 x y
                                          Type: Fraction(Polynomial(Integer))
H := matrix([[yxx, yxz],[yzx, yzz]]);
```

```
                                  Type: Matrix(Fraction(Polynomial(Integer)))
map(pp +-> eval(pp, sl(1)), H)


         +6   0 +
         |      |
   (47)  |     1|
         |0  - -|
         +     2+
                                  Type: Matrix(Fraction(Polynomial(Integer)))
map(pp +-> eval(pp, sl(2)), H)


         +- 6  0+
         |      |
   (48)  |     1|
         | 0   -|
         +     2+
                                  Type: Matrix(Fraction(Polynomial(Integer)))
```