1 Rozwiązywanie układów równań

Poniżej podam dowody podstawowych wyników analitycznych o rozwiązywaniu układów równań, tzn. twierdzenia o funkcji uwikłanej i twierdzenia o funkcji odwrotnej.

Definicja: Odwzorowanie $f : X \to X$ gdzie X jest przestrzenią metryczną nazywamy zwężającym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $q \in [0, 1)$ takie że dla każdego $x, y \in X$ mamy

$$d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y).$$

Lemat 1 *(lemat Banacha o odwzorowaniach zwężających) Jeśli X jest niepustą przestrzenią metryczną zupełną a $f : X \to X$ jest odwzorowanie zwężającym to istnieje dokładnie jeden $x \in X$ taki że $f(x) = x$. Ponadto jeśli $y \in X$ to $d(y, x) \leqslant \frac{1}{1-q} d(y, f(y))$.*

Dowód: Najpierw zauważmy że jeśli taki x istnieje to jest jedyny. Mianowicie niech $f(x) = x$ oraz $f(y) = y$. Wtedy

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y)$$

co jest możliwe tylko jeśli $d(x, y) = 0$, czyli $x = y$.

Niech x_0 będzie dowolnym punktem. x_i definiujemy indukcyjnie wzorem $x_{i+1} = f(x_i)$. Jako że f jest odwzorowaniem zwężającym to przez indukcję pokazujemy że

$$d(x_{i+n}, x_{i+1+n}) \leqslant q^n d(x_i, x_{i+1}). \tag{1}$$

Indukcyjnie sprawdzamy że

$$d(x_{i+n}, x_i) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} d(x_{i+k}, x_{i+k+1}).$$

A więc

$$d(x_{i+n}, x_i) \leqslant \sum q^k d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \frac{1}{1-q} d(x_i, d_{i+1}) \tag{2}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolny. Jako że $q < 1$ to na mocy nierówności 1 istnieje i takie że

$$\frac{d(x_i, x_{i+1})}{1-q} \leqslant \frac{q^i}{1-q} d(x_0, x_1) \leqslant \varepsilon.$$

Nierówność 2 implikuje teraz że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ takiego że $n \geqslant 0$

$$d(x_{i+n}, x_i) \leqslant \varepsilon.$$

A więc ciąg x_i spełnia warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny. Niech x_∞ będzie granicą x_i. Jako że f jest ciągła mamy

$$f(x_\infty) = \lim f(x_i) = \lim x_{i+1} = x_\infty$$

czyli $x = x_\infty$ jest szukanym punktem.

Wreszcie

$$d(y, x) \leqslant d(y, f(y)) + d(f(y), x) \leqslant d(y, f(y)) + qd(y, \infty)$$

czyli

$$(1 - q)d(y, x) \leqslant d(y, f(y))$$

co daje nierówność z konkluzji lematu. □

Lemat 2 *(parametryczna wersja lematu Banacha) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, Y będzie przestrzenią metryczną zupełną, $f : (X \times Y) \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Zakładamy że istnieje $q \in [0, 1)$ takie że dla każdego $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ mamy*

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leqslant d(y_1, y_2).$$

Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $g : X \to Y$ taka że

$$f(x, g(x)) = g(x).$$

Dowód: Przy ustalonym x funkcja f_x zadana wzorem $f_x(y) = f(x, y)$ spełnia założenia lematu 1, więc istnieje dokładnie jeden punkt y_x taki że $f_x(y_x) = y_x$ czyli $f(x, y_x) = y_x$. Jeśli g istnieje to jedyność y_x oznacza że $g(x) = y_x$. Innymi słowy możemy zdefiniować $g(x) = y_x$ i pozostaje pokazać że g jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy pokazać że dla każdego $x \in X$ istnieje otoczenie U takie że g jest ciągła na U. Jako że niezależnie od ciągłości g jest jednoznacznie wyznaczona przez równanie $f(x, g(x)) = g(x)$ to wystarczy pokazać że na U istnieje ciągłe g spełniające $f(x, g(x)) = g(x)$.

Niech $x_0 \in X$ będzie dowolny. Jak już zauważyliśmy istnieje dokładnie jeden $y_0 \in Y$ taki że $f(x_0, y_0) = y_0$. Niech $U \subset X$ składa się z x takich że

$$d(f(x, y_0), y_0) < 1.$$

$x_0 \in U$ i z ciągłości f zbiór U jest otwarty czyli U jest otoczeniem x_0. Pokażemy że na U istnieje ciągłe g.

Niech $g_0 : U \to Y$ będzie funkcją stałą o wartości y_0 (tzn, $\forall_{x \in U} g_0(x) = y_0$). Niech Z będzie przestrzenią funkcji ciągłych g z U w Y takich że

$$\sup_{x \in X} d(g(x), y_0) < \infty.$$

Na Z definiujemy metrykę wzorem

$$d(g,h) = \sup_{x\in X} d(g(x), h(x)).$$

Jest to tak zwana metryka jednostajna. Łatwo sprawdzić że supremum wyżej jest skończone dla $g, h \in Z$ czyli metryka wyżej jest dobrze zdefiniowana. Zauważmy że $g_0 \in Z$. Mianowicie $d(g_0(x), y_0) = d(y_0, y_0) = 0$ czyli supremum wyżej jest skończone czyli faktycznie $g_0 \in Z$, a więc Z jest niepusta.

Jeśli $d(g,h) = 0$ to dla każdego $x \in X$ mamy $d(g(x), h(x)) = 0$, czyli z własności metryki na Y mamy $g(x) = h(x)$, czyli $g = h$. Mamy też symetrię i warunek trójkąta:

$$d(h,g) = \sup_{x\in X} d(h(x), g(x)) = \sup_{x\in X} d(g(x), h(x)) = d(g,h).$$

$$\begin{aligned} d(g,h) = \sup_{x\in X} d(g(x), h(x)) &\leqslant \sup_{x\in X}(d(g(x), w(x)) + d(w(x), h(x))) \\ \leqslant \sup_{x\in X}(d(g(x), w(x)) + \sup_{x\in X} d(w(x), h(x))) &= d(g,w) + d(w,h) \end{aligned}$$

gdzie w pośrednich krokach użyliśmy własności metryki na X. A więc faktycznie otrzymaliśmy metrykę na Z.

Zbieżność względem metryki na Z to zbieżność jednostajna. A więc ciąg Cauchy'ego g_i w Z dla każdego x daje nam ciąg Cauchy'ego $g_i(x)$ w Y, czyli jako że Y jest zupełna to granica punktowo istnieje. Jako że zbieżność jest jednostajna to ta granica jest funkcją ciągłą. Ponadto mamy

$$\sup_{x\in U} d(g(x), y_0) = d(g, g_0)$$

czyli warunek definiujący Z jest równoważny warunkowi $d(g, g_0) < \infty$ który jest spełniony dla granicy ciągu Cauchy'ego. A więc każdy ciąg Cauchy'ego w Z ma granicę należącą do Z, czyli Z jest przestrzenią metryczną zupełną.

Teraz na Z zdefiniujemy funkcję F wzorem

$$F(g)(x) = f(x, g(x)).$$

Zauważmy że dla $g \in Z$ również $F(g) \in Z$. Mianowicie jako złożenie funkcji ciągłych $F(g)$ jest ciągła. Mamy też

$$\begin{aligned} \sup_{x\in U} d(F(g)(x), y_0) &= \sup_{x\in U} d(f(x, g(x)), y_0) \\ &\leqslant \sup_{x\in U}(d(f(x, g(x)), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), y_0) \\ &\leqslant \sup_{x\in U} d(f(x, g(x)), f(x, y_0)) + \sup_{x\in U} d(f(x, y_0), y_0) \end{aligned}$$

Z definicji U

$$\sup_{x\in U} d(f(x, y_0), y_0) \leqslant 1$$

Z własności f mamy

$$\sup_{x\in U} d(f(x,g(x)),f(x,y_0)) \leqslant \sup_{x\in U} qd(g(x),y_0) < \infty$$

jako że $g \in Z$. Czyli faktycznie $F(g) \in Z$.

Mamy też

$$d(F(g),F(h)) = \sup_{x\in U} d(f(x,g(x)),f(x,h(x))) \leqslant \sup_{x\in U} qd(g(x),h(x))$$

$$= q\sup_{x\in U} d(g(x),h(x)) = d(g,h).$$

Czyli F jako odwzorowanie na Z spełnia założenia lematu 1 czyli istnieje $g \in Z$ takie że $F(g) = g$. Takie g jest ciągłe i dla $x \in U$ spełnia

$$g(x) = F(g)(x) = f(x,g(x))$$

czyli równanie $f(x,g(x)) = g(x)$ ma ciągłe rozwiązanie, co kończy dowód. $\square$

Lemat 3 *Niech U będzie otwartym i wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, niech $f : U \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy dla każdego $x, y \in U$ mamy*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \sup_{t\in[0,1]} \|f'(ty + (1-t)x)\|$$

Dowód: Niech $\phi(t) = f(ty + (1-t)x)$. Jako że $x, y \in U$ i U jest wypukły to ϕ jest zdefiniowane na $[0,1]$. Niech v oznacza $f(x) - f(y)$. Niech w będzie funkcjonałem linowym na $\mathbb{R}^m$ takim że $\|w\| = 1$ i $\langle v, w\rangle = \|v\|$ (dla normy euklidesowej wystarczy wziąść produkt skalarny z $v/\|v\|$, dla ogólnych norm taki funkcjonał istnieje na mocy twierdzenia Hanha-Banacha). Niech $\psi(t) = \langle \phi(t) - f(x), w\rangle$. Mamy $\phi(1) = f(y)$ i $\psi(1) = \langle f(y) - f(x), w\rangle$ więc

$$\|f(y) - f(x)\| = \langle f(y) - f(x), w\rangle = \psi(1)$$

czyli by oszacować $\|f(y) - f(x)\|$ wystarczy oszacować $\psi(1)$.

Mamy

$$\psi'(t) = \langle f'(tx + (1-t)y)(x-y), w\rangle,$$

$$|\psi'(t)| \leqslant \|f'(tx + (1-t)y)\|\|x-y\|\|w\| = \|f'(tx + (1-t)y)\|\|x-y\|$$

gdzie użyliśmy równość $\|w\| = 1$. Mamy też $\phi(0) = f(x)$, $\psi(0) = \langle f(x) - f(x), w\rangle = 0$ więc na mocy twierdzenia o wartości średniej dla funkcji rzeczywistych na $[0,1]$ mamy

$$\|f(y) - f(x)\| = \psi(1) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \psi'(t) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)|$$

$$\leqslant \|x-y\| \sup_{t\in[0,1]} \|f'(tx+(1-t)y)\|$$

□

Lemat 4 *(twierdzenie of funkcji uwikłanej). Niech X będzie przestrzenią topologiczną, niech $Y = \mathbb{R}^n$ dla pewnego n, niech f będzie funkcją ciągłą na otwartym podzbiorze $U \subset X \times Y$ o wartościach w Y. Niech $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ będą takie że $(x_0, y_0) \in U$. Zakładamy że pochodna $\nabla_Y f$ funkcji f względem zmiennych z Y istnieje na U i jest ciągła w punkcie (x_0, y_0). Zakładamy że $f(x_0, y_0) = 0$ oraz $\nabla_Y f(x_0, y_0)$ jest odwracalne. Wtedy istnieje otwarte $V \subset X$ takie że $x_0 \in V$ i funkcja ciągła $g : V \to Y$ taka że $\forall_{x\in V}(x, g(x)) \in U$ i $\forall_{x\in V} f(x, g(x)) = 0$. Ponadto istnieje otwarte $W \subset U$, takie że $(x_0, y_0) \in W$ i dla każdego $(x, y) \in W$ równość $f(x, y) = 0$ implikuje $x \in V$ i $y = g(x)$. W szczególności jeśli V jest dostatecznie małe to g jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód: Niech L będzie odwrotnością $\nabla_Y f(x_0, y_0)$, niech ϕ będzie zadane wzorem $\phi(x, y) = -Lf(x, y)+y$. ϕ jest zdefiniowana i ciągła na U, pochodna $\nabla_Y \phi$ istnieje na U i jest ciągła w punkcie (x_0, y_0). Mamy też $\phi(x_0, y_0) = y_0$ oraz $\nabla_Y \phi(x_0, y_0) = -I + I = 0$ gdzie I oznacza odwzorowanie identycznościowe na Y.

Jako że $\nabla_Y \phi$ jest ciągła w (x_0, y_0) i $\nabla_Y \phi(x_0, y_0) = 0$ to istnieje otwarte $U_1 \subset U$ takie że $(x_0, y_0) \in U_1$ i $\|\nabla_Y \phi(x, y)\| < \frac{1}{3}$ dla $(x, y) \in U_1$.

Z definicje topologii na produkcie $X \times Y$ istnieje istnieje otwarte $V_1 \subset X$, $r > 0$ takie że $x_0 \in V_1$ i $V_1 \times B(y_0, r) \subset U_1$ gdzie $B(y_0, r)$ oznacza kulę otwartą o środku w y_0 i promieniu r zawartą w Y. Jako że ϕ jest ciągła i $\phi(x_0, y_0) = y_0$ to istnieje otwarte $V_2 \subset V_1$ takie że $\|\phi(x, y_0) - y_0\| < \frac{r}{3}$.

Stosując lemat 3 do ϕ przy ustalonym $x \in V_2$ widzimy że dla $y_1, y_2 \in B(y_0, r)$ mamy

$$\|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)\| \leqslant \frac{1}{3}\|y_2 - y_1\| \tag{3}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego że na U_1 mamy $\|\nabla_Y \phi\| \leqslant \frac{1}{3}$.

Dla $x \in V_2$ mamy $\|\phi(x, y_0) - y_0\| < \frac{r}{3}$ więc dla $y \in B(y_0, r)$ używając nierówność 3 mamy

$$\|\phi(x, y) - y_0\| \leqslant \|\phi(x, y) - \phi(x, y_0)\| + \|\phi(x, y_0) - y_0\|$$

$$\leqslant \frac{\|y - y_0\|}{3} + \frac{r}{3} \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2}{3}r < r$$

czyli dla $x \in V_2$ i $y \in B(y_0, r)$ mamy $\phi(x, y) \in B(y_0, r)$. $B(y_0, r)$ z metryką euklidesową jest niepustą przestrzenią metryczną zupełną, ϕ jest ciągła i spełnia 3 więc założenia lematu 2 są spełnione czyli istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $g : V_2 \to B(y_0, r)$ która spełnia

$$\phi(x, g(x)) = g(x). \tag{4}$$

Mamy

$$-Lf(x, g(x)) = \phi(x, g(x)) - g(x) = 0.$$

Jako że L jest odwracalne (odwrotność to $\nabla_Y f(x_0, y_0)$) oznacza to że $f(x, g(x)) = 0$. Zauważmy że jeśli $x \in V_2$, $y \in B(y_0, r)$ i mamy $f(x, y) = 0$ to mamy też $\phi(x, y) = y$. Przy ustalonym x lemat 1 implikuje że $y = g(x)$ co oznacza że w treści lematu wystarcza $W = V_2 \times B(y_0, r)$. □

Lemat 5 *Jeśli X to $\mathbb{R}^m$ dla pewnego m, f jest jak w lemacie 4 i dodatkowo w punkcie (x_0, y_0) f jest różniczkowalna względem zmiennych z X, to g jest różniczkowalna w x_0 i mamy*

$$g'(x_0) = -(\nabla_Y f(x_0, y_0))^{-1} \nabla_X f(x_0, y_0)$$

Dowód: Podobnie jak w dowodzie lematu 4 piszemy $L = (\nabla_Y f(x_0, y_0))^{-1}$ i $\phi(x, y) = -Lf(x, y) + y$. ϕ jest różniczkowalna względem x w punkcie (x_0, y_0) i mamy $\nabla_X \phi(x_0, y_0) = -L\nabla_X f(x_0, y_0)$. ϕ jest różniczkowalna względem y na U i $\nabla_Y \phi(x_0, y_0) = 0$, przy tym pochodna ϕ względem y jest ciągła w (x_0, y_0).

Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie że $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Oznaczmy przez M pochodną ϕ w punkcie (x_0, y_0) względem y, tzn. $M = \nabla_Y \phi(x_0, y_0) = -L\nabla_Y f(x_0, y_0)$. Z definicji różniczkowalności istnieje otwarte $V_1 \subset Y$ takie że $y_0 \in V_1$ i

$$\|\phi(x, y_0) - M(x - x_0) - y_0\| < \frac{\varepsilon}{6}\|x - x_0\|. \tag{5}$$

Jako że pochodna ϕ względem y jest ciągła w (x_0, y_0) to istnieje otwarte $U_1 \subset X \times Y$ takie że $(x_0, y_0) \in U_1$ i

$$\|\nabla_Y \phi(x, y)\| < \frac{\varepsilon}{6\max(1, \|M\|)} \tag{6}$$

Z definicje topologii na produkcie istnieje otwarte $V_2 \subset V_1$ i $r > 0$ takie że $x_0 \in V_2$ i $V_2 \times B(y_0, r) \subset U_1$.

Jako że M jest operatorem ciągłym to istnieje otwarte $V_3 \subset X$ takie że $x_0 \in V_3$ oraz $\|M(x - x_0)\| < r/3$ i $\|x - x_0\| < r$ dla $x \in V_3$. Ustalmy $x \in V_3$ i niech $y_1 = y_0 + M(x - x_0)$. Używając powyższe i stosując lemat 3 do ϕ (x jest ustalone, $y_0, y_1 \in B(y_0, r)$) mamy

$$\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{6\|M\|}\|y_1 - y_0\| = \frac{\varepsilon}{6\|M\|}\|M(x - x_0\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6\|M\|}\|M\|\|x-x_0\| = \frac{\varepsilon}{6}\|x-x_0\|.$$

Używając powyższe i nierówność 5 mamy

$$\|\phi(x,y_1)-y_1\| \leqslant \|\phi(x,y_1)-\phi(x,y_0)\| + \|\phi(x,y_0)-y_1\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6}\|x-x_0\| + \|\phi(x,y_0)-M(x-x_0)-y_0\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6}\|x-x_0\| + \frac{\varepsilon}{6}\|x-x_0\| = \frac{\varepsilon}{3}\|x-x_0\|.$$

Nierówność 6 implikuje

$$\|\nabla_Y \phi(x,y)\| < \frac{1}{3}.$$

Używając powyższą nierówności i lemat 3 dla $y \in B(y_0,r)$ mamy

$$\|\phi(x,y)-y_0\| \leqslant \|\phi(x,y)-\phi(x,y_0)\| + \|\phi(x,y_0)-y_0\|$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\|y-y_0\| + \|\phi(x,x_0)-M(x-x_0)-y_0\| + \|M(x-x_0)\|.$$

Z definicji V_3 dla $x \in V_3$ mamy $\|M(x-x_0)\| \leqslant \frac{1}{3}r$ i $\|x-x_0\| < r$ więc używając powyższe i nierówność 5 mamy

$$\|\phi(x,y)-y_0\| \leqslant \frac{1}{3}r + \frac{\varepsilon}{6}\|x-x_0\| + \frac{1}{3}r$$

$$\leqslant \frac{1}{3}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{3}r = \frac{5/6}{r} < r$$

czyli $\phi(x,y) \in B(y_0,r)$. A więc do ϕ (cały czas z ustalonym x) stosuje się lemat 1, czyli istnieje y takie że $\phi(x,y) = x$. Podobnie jak uzasadnialiśmy w dowodzie lematu 4 oznacza to że $y = g(x)$. Z lematu 1 mamy

$$\|g(x)-y_1\| = \|y-y_1\| \leqslant \frac{1}{1-1/3}\|\phi(x,y_1)-y_1\|$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{3}\|x-x_0\| = \frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\| < \varepsilon\|x-x_0\|$$

Biorąc pod uwagę że $y_1 = y_0 + M(x-x_0) = g(x_0) + M(x-x_0)$ mamy

$$\|g(x)-g(x_0)-M(x-x_0)\| \leqslant \varepsilon\|x-x_0\|. \tag{7}$$

Jako że $x \in V_3$ było dowolne to powyższa nierówność zachodzi dla każdego $x \in V_3$. Jako że $\varepsilon \in (0,\frac{1}{3})$ było dowolne to dla każdego $\varepsilon \in (0,\frac{1}{3})$ istnieje otwarte V_3 takie że $x_0 \in V_3$ i dla każdego $x \in V_3$ spełniona jest nierówność 7. Lecz to oznacza że M spełnia warunek definiujący pochodną g w x_0, czyli g jest różniczkowalna w x_0 i

$$g'(x_0) = M = -L\nabla_X f(x_0,y_0) = -(\nabla_Y f(x_0,y_0))^{-1}\nabla_X f(x_0,y_0)$$

co kończy dowód. □

Uwaga: Lemat 4 można by też dowodzić w podobnym duchu jak lemat 5, w szczególności można w ten sposób pokazać że jeśli f jest tylko ciągła w (x_0, y_0) to g istnieje w pewnym otoczeniu x_0 i jest ciągła w x_0.

Lemat 6 *Jeśli X to $\mathbb{R}^m$ dla pewnego m, f jest jak w lemacie 4 i dodatkowo f jest klasy C^k to g jest klasy C^k.*

Dowód: Na mocy lematu 4 funkcja g istnieje i jest ciągła w pewnym otwartym $V \subset X$ takim że $x_0 \in V$. Jeśli $x \in V$ zaś $y = g(x)$ to w pewnym otoczeniu (x, y) są spełnione założenia lematu 5. A więc g jest różniczkowalna w x i mamy

$$g'(x) = -(\nabla_Y f(x, Y))^{-1} \nabla_X f(x, y) = -(\nabla_X f(x, g(x)) \nabla_Y f(x, g(x)).$$

Dla $k = 1$ wiemy że pochodne f są ciągłe i g jest ciągłe, więc pochodna g jest klasy C^1. Podobnie, jeśli pochodne f są C^k i wiemy że g jest co najmniej klasy C^{k-1} to wzór wyżej implikuje że g jest klasy C^k. A więc dla dowolnego k wynik dostaniemy przez indukcję. □

Uwaga: Lemat 6 można by dowodzić w podobnym duchu jak lematy 2 i 4. Dokładniej, zamiast przestrzeni funkcji ciągłych trzeba by rozpatrywać przestrzeń funkcji klasy C^k z metryką odpowiadającą jednostajnej zbieżności pochodnych do rzędu k. Jednakże dla $k > 0$ potrzebne oszacowania są dużo bardziej skomplikowane niż oszacowania dla $k = 0$, dlatego podany dowód jest prostszy.

Lemat 7 *(twierdzenie o funkcji odwrotnej) Niech U będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$ dla pewnego n. Niech $f : U \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną. Zakładamy że $x_0 \in U$ i że pochodna f jest ciągła w punkcie x_0. Ponadto zakładamy że $f'(x_0)$ jest odwracalne. Niech $y_0 = f(x_0)$. Wtedy istnieją otwarte $V, W \subset \mathbb{R}^n$ takie że $x_0 \in V$, $y_0 \in W$ i funkcja ciągła $g : W \to V$ takie że $f(V) \subset W$, $f \circ g$ jest identycznością na V, $g \circ f$ jest identycznością na W, g jest różniczkowalna w y_0 i $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. Ponadto jeśli f jest klasy C^k to g jest klasy C^k.*

Dowód: Niech $h(x, y) = f(y) - x$. h spełnia założenia lematu 4 na $\mathbb{R}^n \times U$ (z zamienionymi rolami x_0 i y_0), a więc istnieje $W_0 \subset \mathbb{R}^n$, $y_0 \in W_0$ i ciągła $g : W_0 \to U$ takie że $f(g(y)) = y$ dla $y \in V_0$. Innymi słowy $f \circ g$ jest identycznością na W_0. Na mocy ostatniej części lematu 4 istnieje zbiór otwarty $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ taki że $(x_0, y_0) \in Z$ i dla $(x, y) \in Z$ równość $f(x) - y = h(y, x) = 0$ implikuje $y \in W_0$ i $x = g(y)$.

Z definicji topologi na produkcie istnieją otwarte $V_1, W_1 \subset \mathbb{R}^n$ takie że $x_0 \in V_1$, $y_0 \in W_1$ i $V_1 \times W_1 \subset Z$. Jako że f jest ciągła to $V_2 = V_1 \cap f^{-1}(W_1)$ jest otwarte.

Dla $x \in V_2$ mamy $f(x) \in W_1$ czyli skoro $V_2 \subset V_1$ to $(x, f(x)) \in V_1 \times W_1 \subset Z$. To implikuje $f(x) \in W_0$ i równość $x = g(f(x))$, czyli $g \circ f$ jest identycznością na V_2. Jako że g jest ciągła w y_0, $g(y_0) = x_0$ i $x_0 \in V_2$ to istnieje otwarte $W_3 \subset W_0$ takie że $y_0 \in W_3$, i $g(W_3) \subset V_2$. Niech $V_3 = V_2 \cap f^{-1}(W_3)$. Z definicji V_3 mamy $f(V_3) \subset W_3$. Z definicji W_3 mamy $g(W_3) \subset V_2$. Ale wiemy też że $f \circ g$ jest identycznością na W_0, więc dla $y \in W_3 \subset W_0$ mamy $y = f(g(y))$ i w szczególności $f(g(y)) \in W_3$, czyli $g(y) \in f^{-1}(W_3)$. A więc $g(y) \in V_2 \cap f^{-1}(W_3) = V_3$. Czyli $g(W_3) \subset V_3$. A więc biorąc $V = V_3$, $W = W_3$ i ograniczając g do W_3 mamy zawierania dla obrazów $f(V) \subset W$, $g(W) \subset V$. Skoro dziedziny się zgadzają to pokazane wcześniej na większych zbiorach równości $f(g(y)) = y$ i $g(f(x)) = x$ zachodzą dla $x \in V$, $y \in W$.

h spełnia również założenia lematu 5 czyli g jest różniczkowalna w x_0.

Jeśli f jest klasy C^k to h spełnia założenia lematu 6 co implikuje że g jest klasy C^k. $\square$

Uwaga: Lemat 7 można by dowodzić bezpośrednio i sprowadzić do niego lemat 6. Ale takie sprowadzenie nie działa dla lematów 4 i 5.