1 Zadanie 1

Jeśli f ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu p i pochodna cząstkowa f po y w punkcie $p = (x_0, y_0)$ jest różna od zera to równanie $f(x, y(x)) = 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie w pewnym otoczeniu p. Wszystkie funkcje w zadaniu mają ciągłe pochodne cząstkowe, więc najpierw obliczamy wartość funkcji, by sprawdzić czy ten punkt daje rozwiązanie, a potem obliczamy wartość pochodnej.

Poniższa funkcja wykonuje to obliczenie, wypisując po drodze komunkaty objaśniajace wyniki:

```
-- Funkcja sprawdzająca czy pochodna cząstkowa po y nie znika,
-- długa wersja.
rozw1p(f, p) ==
    print(message("funkcja f =")$OutputForm)
    print(f)
    print(message("wartość f w p")$OutputForm)
    print(eval(f, [x, y], p))
    print(message("D(f, y) =")$OutputForm)
    print(D(f, y))
    print(message("wartość D(f, y) w p")$OutputForm)
    print(eval(D(f, y), [x, y], p))
```

Można też użyć prostszą funkcję która zwraca wartość funkcji i pochodnej cząstkowej po y jako listę

```
rozw1(f, p) == [eval(f, [x, y], p), eval(D(f, y), [x, y], p)]
```

1.1 Punkt a

Podstawiamy wyrażenie zwierające naszą funkcję pod zmienną `f`. Ponieważ potrzebujemy równanie postaci $f(x, y) = 0$ to odejmujemy od lewej strony równania prawą:

```
f := x^4*y + x*y^3 -10

           3    4
   (3)  x y  + x y - 10
                                                Type: Polynomial(Integer)
```

Wyżej jest wyrażenie w postaci tekstowej, `Polynomial(Integer)` jest typem automatycznie przypisanym naszamu wyrażeniu przez FrICAS-a. Niżej wersja matematyczna (używająca LaTeX):

$$x\ y^3 + x^4\ y - 10 \tag{3}$$

Teraz używamy naszą pierwszą funkcję:

```
rozw1p(f, [1, 2])

   Compiling function rozw1p with type (Polynomial(Integer), List(
      PositiveInteger)) -> Void
   funkcja f =
      3    4
   x y  + x y - 10
   wartość f w p
   0
   D(f, y) =
       2    4
   3 x y  + x
   wartość D(f, y) w p
   13
                                                            Type: Void
```

Teraz drugą funkcję:

```
rozw1(f, [1, 2])

   Compiling function rozw1 with type (Polynomial(Integer), List(
      PositiveInteger)) -> List(Polynomial(Integer))

   (5)  [0, 13]
                                        Type: List(Polynomial(Integer))
```

Wynik w notacji matematycznej

$$[0,\ 13] \tag{5}$$

Skoro wartość funkcji jest zerowa, a wartość pochodnej po y niezerowa to w pewnym otoczeniu $(1, 2)$ rozwiązanie $y = y(x)$ istnieje i jest jednoznaczne.

1.2 Punkt b

Podstawiamy wyrażenie dające f i obliczamy wartości w $(2, 4)$:

```
f := x^y - y^x
rozw1(f, [2, 4])
```

Dostajemy:

$$-y^x + x^y \tag{6}$$

$$[0,\ 16\ \log(2) - 8] \tag{7}$$

log(2) jest niewymierny, więc wartość pochodnej jest niezerowa.

W $(3, 3)$:

```
rozw1(f, [3, 3])
```

$$[0,\ 27 \log(3) - 27] \tag{8}$$

log(3) jest niewymierny, więc wartość pochodnej jest niezerowa.

W $(2, 5)$:

```
rozw1(f, [2, 5])
```

$$[7,\ 32 \log(2) - 10] \tag{9}$$

Tym razem punkt nie leży na krzywej $f(x, y) = 0$, a więc nie ma rozwiązania.

1.3 Punkt c

```
f := x^2 + y^2 - 2*x*y
```

$$y^2 - 2\ x\ y + x^2 \tag{10}$$

```
rozw1(f, [1, 1])
rozw1(f, [0, 0])
```

$$[0,\ 0] \tag{11}$$

$$[0,\ 0] \tag{12}$$

Czyli pochodne po y są zerowe, a więc musimy badać dokładniej.

Rozkładamy na czynniki, wielomian jest kwadratem

```
factor(f)
```

$$(y - x)^2 \tag{13}$$

Wielomian jest kwadratem, więc wystarczy badać czynnik liniowy. On oczywiście daje jednoznaczne rozwiązanie, ale sprawdzamy co powie nasza metoda:

```
f := y - x
```

$$y - x \tag{14}$$

```
rozw1(f, [1, 1])
```

(15) $[0, 1]$

Pochodna niezerowa, czyli w porządku.

```
rozw1(f, [0, 0])
```

(16) $[0, 1]$

Też w porządku.

1.4 Punkt d

```
f := x^4 + y^4 - 2*x^2*y^2
```

(17) $$y^4 - 2\,x^2\,y^2 + x^4$$

```
rozw1(f, [1, 1])
```

(18) $[0, 0]$

```
rozw1(f, [0, 0])
```

(19) $[0, 0]$

Pochodne są zerowe, rozkładamy na czynniki.

```
factor(f)
```

(20) $$(y - x)^2\,(y + x)^2$$

Wielomian jest postaci $f = ((y-x)(y+x))^2$, czyli jest kwadratem produktu funkcji liniowych. Ten produkt dla danego $x \neq 0$ oczywiście daje dwa rozwiązania różne rozwiązania. Skoro są on różne, to można dobrać otoczenie tak by rozwiązanie było jednoznaczne. Inaczej jest gdy $x = 0$, wtedy oba rozwiązania są bliskie 0 i nie ma jednoznaczności w otoczeniu $(0, 0)$. Ale zbadamy produkt by sprawdzić co wyjdzie:

```
f := (y - x)*(y + x)
```

$$y^2 - x^2 \tag{21}$$

```
rozw1(f, [1, 1])
```

$$[0,\ 2] \tag{22}$$

czyli w $(1,1)$ pochodna jest niezerowa i mamy jednoznaczność w pewnym otoczeniu.

```
rozw1(f, [0, 0])
```

$$[0,\ 0] \tag{23}$$

Tu dalej pochodna jest zerowa (tak jak powinno być).

1.5 Punkt e

```
f := x^2 + y^2 - 2*x
```

$$y^2 + x^2 - 2\ x \tag{24}$$

```
rozw1(f, [1, 1])
```

$$[0,\ 2] \tag{25}$$

Pochodna niezerowa.

```
rozw1(f, [0, 0])
```

$$[0,\ 0] \tag{26}$$

Tu pochodna jest zerowa. Widać że f można zapisać jako $f = (x-1)^2 + y^2 - 1$ co jest równaniem okręgu o środku w $(1,0)$ i promieniu 1. Dla dodatnich x bliskich 0 prosta pionowa przecina okrąg w dwu punktach bliskich 0, a więc w otoczeniu $(0,0)$ nie ma jednoznaczności rozwiązania (a dla ujemnych x nie ma rozwiązań).

1.6 Punkt f

```
f := x^2 +y^2 - x -2*x*y
```

$$y^2 - 2\ x\ y + x^2 - x \tag{27}$$

```
rozw1(f, [1, 0])
```

$$[0,\ -2] \tag{28}$$

Czyli niezerowa pochodna.

```
rozw1(f, [0, 0])
```

$$[0,\ 0] \tag{29}$$

Tu pochodna zerowa. Przy ustalonym x równanie $f(y, x) = 0$ jest równaniem kwadratowym. Obliczamy

$$\Delta = 4x^2 - 4(x^2 - x) = x$$

Czyli dla $x > 0$ są dwa rozwiązania, dla $x < 0$ nie ma rozwiązania, czyli w otoczeniu $(0, 0)$ nie ma jednoznacznego rozwiązania.

1.7 Punkt g

```
f := x^3 - y^3 + x - y
```

$$-y^3 - y + x^3 + x \tag{30}$$

– wychodzi wynik który nie ma zer

```
rozw1(f, [p, p])
```

$$\left[0,\ -3\ p^2 - 1\right] \tag{31}$$

Wynik nie ma zer.

To można też rozwiązać pisząc $f = u(x) - u(y)$ gdzie $u(x) = x^3 + x$. Równanie jest równoważne równaniu $u(x) = u(y)$. u jest to funkcja rosnąca, więc jedyne rozwiąznie to $x = y$.

1.8 Punkt h

```
f := x^4 + y^4 - 2*x*y
```

(32) $$y^4 - 2\ x\ y + x^4$$

```
rozw1(f, [1, 1])
```

(33) [0, 2]

```
rozw1(f, [0, 0])
```

(34) [0, 0]

Tu pochodna jest zerowa. Ten przykład jest nieco bardziej skomplikowany, bo przy ustalonym x dostajemy równanie stopnia 4 ze względu na y. Takie równie ma zawsze parzystą ilość rozwiązań rzeczywistych. Dla x bliskiego 0 również y musi być bliski 0, tzn. nie ma rozwiązań z dużym $|y|$. A więc w otoczeniu $(0, 0)$ nie ma jednoznaczności rozwiązania, tzn. wiemy że są 4 lub 2 lub 0 rozwiązań, nie wiemy ile dokładnie, ale na pewno nie jest to 1.

2 Zadanie 2

Jeśli gradine f jest niezerowy w (x_0, y_0, z_0) to równanie płaszczyzny stycznej ma postać $ax + by + cz + d$ gdzie (a, b, c) to gradient f. W więc a, b, c wyznaczamy licząc gradient.

Komputerowo obliczamy gradient jako listę pochodnych cząstkowych:

```
df(f) == [D(f, x), D(f, y), D(f, z)]
```

Teraz funkcja z punktu a

```
f := x^2*z + y*z^2 - 2
```

(36) $$y\ z^2 + x^2\ z - 2$$

Sprawdzamy wartość funkcji w punkcie

```
eval(f, [x, y, z], [sqrt(2), 0, 1])
```

(37) 0

Sprawdzamy obliczanie gradientu

```
df(f)
```

$$\left[2\ x\ z,\ z^2,\ 2\ y\ z+x^2\right] \tag{38}$$

Funkcja do obliczania warości gradientu w punkcie `p`

```
edf(f, p) == [eval(fi, [x, y, z], p) for fi in df(f)]
```

Type: Void

Obliczamu wartość gradientu w $p = (\sqrt(2), 0, 1)$:

```
edf(f, [sqrt(2), 0, 1])
```

$$\left[2\ \sqrt{2},\ 1,\ 2\right] \tag{40}$$

Czyli równanie płaszczyzny stycznej ma prostać $2\sqrt{2}x + y + 2z + d = 0$ i pozostaje obliczyć d. Robimy to podstawiając wyżej $x = x_0 = \sqrt(2)$, $y = y_0 = 0$, $z = z_0 = 1$ i przyrówując to lewą stronę równania wyżej z prawią czyli 0. Innymi słowy $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ To ostanie wyrażenie to produkt skalarny gradientu z (x_0, y_0, z_0).

Definiujemy pomocniczą funkcję obliczającą produkt skalanrny (`c`) i wyraz wolny (`w`):

```
c(l, p) == l(1)*p(1) + l(2)*p(2) + l(3)*p(3)
w(f, p) == -c(edf(f, p), p)
```

Teraz obliczamy wyraz wolny

```
w(f, [sqrt(2), 0, 1])
```

$$-6 \tag{43}$$

Czyli łącznie równanie płaszczyzny stycznej ma prostać

$$2\sqrt{2}x + y + 2z - 6 = 0.$$

Oczywiście, jeśli to potrzebne to równanie można przekształcić do innej postaci, ale ta często jest wygodna. Można też zapisać równanie w postaci

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Tzn. w tej postaci nie trzeba wyliczać wyrazu wolnego, bo jest on równy 0.

2.1 Punkt b

$A = (0, 1, 1)$

```
f := exp(x*z) - y*z
```

(44) $$e^{x\ z} - y\ z$$

```
p := [0, 1, 1]
```

(45) $$[0,\ 1,\ 1]$$

```
edf(f, p)
```

(46) $$[1,\ -1,\ -1]$$

```
w(f, p)
```

(47) $$2$$

Czyli równanie:

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Dla $B = (1, e, 1)$:

```
p := [1, %e, 1]
```

(48) $$[1,\ e,\ 1]$$

```
edf(f, p)
```

(49) $$[e,\ -1,\ 0]$$

```
w(f, p)
```

(50) $$0$$

Czyli równanie

$$ex - y = 0.$$

2.2 Punkt c

```
f := x^2 + y^3 + z^4 - x - z
```

$$z^4 - z + y^3 + x^2 - x \tag{51}$$

Dla $A = (0, 0, 0)$:

```
p := [0, 0, 0]
```

$$[0,\ 0,\ 0] \tag{52}$$

```
eval(f, [x, y, z], p)
```

$$0 \tag{53}$$

```
edf(f, p)
```

$$[-1,\ 0,\ -1] \tag{54}$$

```
w(f, p)
```

$$0 \tag{55}$$

czyli równanie

$$-x - z = 0.$$

Dla $B = (1, 0, 0)$:

```
p := [1, 0, 0]
```

$$[1,\ 0,\ 0] \tag{56}$$

```
eval(f, [x, y, z], p)
```

$$0 \tag{57}$$

```
edf(f, p)
```

$$[1,\ 0,\ -1] \tag{58}$$

```
w(f, p)
```

(59) $$-1$$

czyli równanie:

$$x - z - 1 = 0.$$

Dla $C = (1, 0, 1)$:

```
p := [1, 0, 1]
```

(60) [1, 0, 1]

(60) [1, 0, 1]

```
eval(f, [x, y, z], p)
```

(61) $$0$$

```
edf(f, p)
```

(62) [1, 0, 3]

```
w(f, p)
```

(63) $$-4$$

czyli równanie

$$x + 3z - 4 = 0.$$

3 Zadanie 3

Zapisujemy jako pomocnicze funkcje wzory na pochodną i drugą pochodną funkcji uwikłanej:

```
dy(f) == -D(f, x)/D(f, y)
d2y(f) == (-D(f, y)^2*D(f, x, 2) - D(f, x)^2*D(f, y, 2) + _
          2*D(f, y)*D(f, x)*D(f, [x ,y]))/D(f, y)^3
```

3.1 Punkt a

```
f := x*exp(y) - y + 1
```

$$x\ e^y - y + 1 \tag{66}$$

```
dy(f)
```

$$-\frac{e^y}{x\ e^y - 1} \tag{67}$$

```
d2y(f)
```

$$\frac{x\ e^{y3} - 2\ e^{y2}}{x^3\ e^{y3} - 3\ x^2\ e^{y2} + 3\ x\ e^y - 1} \tag{68}$$

3.2 Punkt b

```
f := x^2 + y^2 - 3*x*y
```

$$y^2 - 3\ x\ y + x^2 \tag{69}$$

```
dy(f)
```

$$\frac{3\ y - 2\ x}{2\ y - 3\ x} \tag{70}$$

```
d2y(f)
```

$$\frac{10\ y^2 - 30\ x\ y + 10\ x^2}{8\ y^3 - 36\ x\ y^2 + 54\ x^2\ y - 27\ x^3} \tag{71}$$

3.3 Punkt c

```
f := x - y + exp(x) - exp(y)
```

$$-e^y + e^x - y + x \tag{72}$$

Tu f ma postać $u(x) - u(y)$ z $u(x) = \exp(x) + x$. Jako że u jest monotoniczna to mamy $y = x$, co ma pochodną równą 1 i drugą pochodną 0. Niżej patrzymy co dają wzory:

```
dy(f)
```

(73) $$\frac{e^x+1}{e^y+1}$$

Porównujemy z jawnym rozwiązaniem

```
eval(%, y = x)
```

(74) $$1$$

```
d2y(f)
```

(75) $$\frac{e^x\ e^{y2} + \left(-e^{x2}-1\right)\ e^y + e^x}{e^{y3} + 3\ e^{y2} + 3\ e^y + 1}$$

Porównujemy z jawnym rozwiązaniem

```
eval(%, y = x)
```

(76) $$0$$

4 Zadanie 4

Ekstrmum lokalne funkcji uwikłanej $y(x)$ spełniającej $f(x, y) = 0$ jest też ektremum lokalnym y przy warynku $f = 0$. Jeśli pochodna po f po y jest niezerowa, czyli jeśli da się użyć twierdzenie o funkci uwikłanej, to da się też użyć metodę mnożników Lagrange'a, co pozwala wyznaczyć punkty podejrzane o ekstremum lokalne.

4.1 Punkt a

```
f := x^2 + y^2 + 4*y - x*y - 2*x
```

(77) $$y^2 + (-x+4)\ y + x^2 - 2\ x$$

Do metody mnożników Lagrange'a potrzebujemy gradient f, składowe gradientu podstawiamy pod zmienne `dfx` i `dfy`.

```
dfx := D(f, x)
```

(78) $$-y + 2\ x - 2$$

```
dfy := D(f, y)
```

(79) $$2\ y - x + 4$$

Potrzebujemy też gradient y czyli $(0,1)$, stąd równanie $\nabla y - \lambda\nabla f$ upraszcza się do $(0,1) - \lambda\nabla f$, co pisząc `l` zamiast λ programujemy jako

```
eqs := [f, -l*dfx, 1 - l*dfy]
```

(80)
$$\left[y^2 + (-x+4)\ y + x^2 - 2\ x,\ l\ y - 2\ l\ x + 2\ l,\ -2\ l\ y + l\ x - 4\ l + 1\right]$$

Funkcja `solve` rozwiązuje układ równań:

```
solve(eqs)
```

(81) $$\left[\left[y = 8\ l - 2,\ x = 4\ l,\ 12\ l^2 - 1 = 0\right]\right]$$

Widać że są dwa rozwiąznie rzeczywiste odpowiadające $\lambda = \pm 1/\sqrt{12}$. Nasze równanie jest kwadratowe ze względu na y, licząc deltę widać że nie ma rozwiązań dla dużych x. A więc zbiór rozwiązań jest ograniczony (i oczywiście domknięty) a więc zwarty, czyli maksimum i minimum jest osięgnięte. Jako że mamy dwa punkty podejrzane, to jeden jest minimum a drugi maksimum. Licząc wartości możnaby sprawdzić który jest maksimum.

4.2 Punkt b

```
f := x^3 + y^3 - 12*x*y
```

(82) $$y^3 - 12\ x\ y + x^3$$

```
dfx := D(f, x)
```

(83) $$-12\ y + 3\ x^2$$

```
dfy := D(f, y)
```

(84) $$3\ y^2 - 12\ x$$

```
eqs := [f, -l*dfx, 1 - l*dfy]
```

(85) $$\left[y^3 - 12\ x\ y + x^3,\ 12\ l\ y - 3\ l\ x^2,\ -3\ l\ y^2 + 12\ l\ x + 1\right]$$

```
solve(eqs)
```

(86) $$\left[\left[y = 384\ l,\ x = 18432\ l^2,\ 221184\ l^3 - 1 = 0\right]\right]$$

Tym razem tylko jedna wartość λ jest rzeczywista. Można sprawdzić że dla x dążącego do ∞ wartości y dąża do $-\infty$. Podobnie dla x dążącego do $-\infty$ wartości y dąża do ∞. A więc y jest nieograniczone, gdyby było ektremum lokalne, to byłoby też drugie. Skoro jest tylko jeden punk podejrzany, to jest on punktem przegięcia.

4.3 Punkt c

```
f := (1/2)*log(x^2 + y^2) - atan(y/x)
dfx := D(f, x)
dfy := D(f, y)
```

$$\frac{\log\left(y^2+x^2\right)-2\,\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{2} \tag{87}$$

$$\frac{y+x}{y^2+x^2} \tag{88}$$

$$\frac{y-x}{y^2+x^2} \tag{89}$$

Zestawiamy równania:

```
eqs := [f, -l*dfx, 1 - l*dfy]
```

$$\left[\frac{\log\left(y^2+x^2\right)-2\,\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{2},\ \frac{-l\ y-l\ x}{y^2+x^2},\ \frac{y^2-l\ y+x^2+l\ x}{y^2+x^2}\right] \tag{90}$$

Tym razem równania zawierają funkcje przestępne, ale możana je uprościć. Mianowicie, w drugim równaniu albo $x+y=0$ albo $l=0$, ale $l=0$ oznacza że trzecie równanie nie jest spełnione, więc $x+y=0$, czyli $y=-x$. Podstawiamy to za y:

```
[eval(fi, [y = -x]) for fi in eqs]
```

$$\left[\frac{2\,\log\left(2\,x^2\right)+\pi}{4},\ 0,\ \frac{x+l}{x}\right] \tag{91}$$

```
solve(%(1), x)
```

$$\left[x=-\frac{\sqrt{\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}}}}{2},\ x=\frac{\sqrt{\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}}}}{2}\right] \tag{92}$$

Geomentrycznie równanie opisuje fragment spirali logarytmicznej skąd widać że jest maksimum i minimum lokalne.

5 Zadanie 5

Nasze f jest symetryczne względem zamiany x z y więc by znaleźć a wystarczy znaleźć maksimum i minimum y. Podadto widać że zbiór rozwiązań jest zwarty, czyli ekstrema istnieją. Jak poprzednia stosujemy metodę mnożników Lagrange'a:

```
f := x^4 + y^4 - 9*x*y
dfx := D(f, x)
dfy := D(f, y)
eqs := [f, -l*dfx, 1 - l*dfy]
```

$$y^4 - 9\ x\ y + x^4 \tag{93}$$

$$-9\ y + 4\ x^3 \tag{94}$$

$$4\ y^3 - 9\ x \tag{95}$$

$$\left[y^4 - 9\ x\ y + x^4,\ 9\ l\ y - 4\ l\ x^3,\ -4\ l\ y^3 + 9\ l\ x + 1\right] \tag{96}$$

```
solve(eqs)
```

(97)

$$\left[\left[y = \frac{129140163\ l^5}{2},\ x = \frac{94143178827\ l^7}{2},\ 847288609443\ l^8 - 1 = 0\right]\right]$$

Równanie na λ ma dwa pierwastki rzeczywiste, $\pm(3)^{-25/8}$. Daje to $y = \pm 3^b/2$ gdzie $b = 17 - 5(-25/8) = 261/8$. Oczywiście wartość z plusem to maksimum a z minusem to minimum, zaś $a = 3^b/2$.