Analiza matematyczna 1B, Lista 1

Zadania 16-19 są na konwersatorium.

1. Pokaż, że $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

2. Udowodnij ze dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

3. Dla $k + l + m = m$ symbol trójmianowy $\binom{n}{k\ l\ m}$ definiujemy wzorem

$$\binom{n}{k\ l\ m} = \frac{n!}{k!l!m!}.$$

Pokaż że dla $x, y, z \in \mathbb{R}$ i naturalnego n zachodzi następujący wzór:

$$(x + y + z)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n}{k\ l\ (n-k-l)}x^k y^l z^{n-k-l}.$$

4. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{9}, \binom{99}{11}, \binom{100}{45}, \binom{100}{75}.$$

5. Uzasadnij że $\binom{n}{k}$ jest liczbą całkowitą (we wzorze występuje dzielenie!).

6. Udowodnij indukcyjnie że: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $3|n^3 - n$, $2^n + 25 > 10n$.

7. Dla zdania $T(n)$ zachodzą implikacje $T(n) \implies T(n+7)$ i $T(n+5) \implies T(n)$. Ponadto zachodzi $T(0)$. Pokaż że $T(n)$ zachodzi dla dowolnego n.

8. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ wyprowadź równość:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

9. Udowodnij nierówności:

$$1 - a \leq \frac{1}{1+a} \leq 1 - \frac{a}{1+a}.$$

10. Udowodnij nierówność:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

11. Pokazać że dla wymiernych a, b, c, d z równiości $a + b\sqrt{2} = c + \sqrt{d}$ wynika $a = c$ i $b = d$.

12. Które z następujących liczb są niewymierne: $7+4\sqrt{3}$, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

13. Które z poniższych zbiorów są ograniczone z góry: $\{\sin(n) : n \text{ naturalne}\}$, $\{5 - x^3 : x \in \mathbb{R}\}$, $\{x^2 + x + 7 : x \in \mathbb{R}, -1000 < x < 1000\}$, $\{\frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, x < 0\}$, $\{\frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, x < 1\}$, $\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$.

14. Wyznaczyć kres górny zbioru $A = \{\frac{n}{2^n} : n \text{ naturalne}\}$

15. Wyznaczyć kres górny zbioru $A = \{\frac{k}{m} : k \text{ i } m \text{ całkowite}, m \neq 0, k/m < 1\}$

16. Udowodnij nierówność Bernoulli'ego

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

dla x_k tego samego znaku, takich że $x_k \geq -1$. Wywnioskować stąd że $(1+x)^n \geq 1 + nx$ dla $x \geq 1$.
17. Pokazać że
$$\frac{y^4 - 2xy^3 + 3x^2y^2 - 2x^3y + x^4}{x^2y^2} \geq 1.$$
18. Funkcja g określona na zbiorze liczb naturalnych i przyjmująca wartości naturalne jest rosnąca, tzn. $g(n+1) > g(n)$ i dla n niepodzielnych przez 3 zachodzi $g(3n) = 3g(n)$. Ponadto $g(3) = 3$. Pokazać że $g(n) = n$ dla każdego naturalnego n.
19. Wyznaczyć kres górny zbioru $A = \{\frac{1}{x} : \text{x} > 1\}$.