Analiza matematyczna 1B, Lista 10

1. Indukcyjnie pokaż że jeśli $f(y)$ jest n-krotnie różniczkowalne w $g(x_0)$ i $g(x)$ jest n-krotnie różniczkowalne w x_0 to $f \circ g$ jest n-krotnie różniczkowalne w x_0.

2. Indukcyjnie pokaż że jeśli $f(x)$ jest n-krotnie różniczkowalne w x_0, $n > 1$ i $f'(x_0) \neq 0$ (co jak wiemy oznacza że w pewnym otoczeniu x_0 funkcja f posiada funkcję odwrotną) to funkcja odwrotna do f jest n-krotnie różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$. Podaj wzór na drugą pochodną funkcji odwrotnej.

3. Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie x. Oblicz $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ (tą granicę nazywamy pochodną symetryczną). Podaj przykład funkcji która nie jest różniczkowalna w x, ale powyższa granica istnieje.

4. Niech funkcja f będzie dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x. Oblicz $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$. Podaj przykład funkcji która nie jest różniczkowalna w x, ale powyższa granica istnieje.

5. Niech a będzie ustalone. Bazując na wzorze Taylora dla exp i log oblicz $\lim_{t\to\infty}(1+\frac{a}{t})^t$.

6. Które z poniższych granic daje się obliczyć przy pomocy requł l'Hospitala: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin(x)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\sqrt{\log(x)^2+1})}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x(1-x)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

7. Niech funkcja f będzie różniczkowalna na całej prostej i spełnia $f'(x) = bf(x)$ dla pewnej stałej b. Pokaż że $f(x) = c\exp(bx)$ dla pewnej stałej c. Wskazówka: zróżniczkuj $\exp(-bx)f(x)$.

8. Przypominam że prostą o przedstawieniu parametrycznym $x(t) = at + b$, $y(t) = ct + d$ nazywamy asymptotą f jeśli $\lim_{t\to\infty} d(W_f, (x(t), y(t))) = 0$ gdzie $d(W_f, (x, y)) = \inf_z d((z, f(z)), (x, y) = \inf_z \sqrt{(z-x)^2 + (f(z)-y)^2}$ jest odległością do wykresu f. Pokaż że nachylenie $\frac{b}{a}$ asymptoty poziomej lub ukośnej w plus nieskończoności to $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Jak to zmodyfikować dla asymptoty w minus nieskończoności?

9. Zakładamy że f i g mają asymptotę poziomą lub ukośną w plus nieskończoności. Pokaż że jest to ta sama asymptota wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $c > 0$ takie że $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(cx) = 0$.

10. Niech f będzie ciągła na przedziale $(x, x+h)$. Uzasadnij że jeśli $\limsup_{x\to x+} f(x) = \infty$ lub $\limsup_{x\to x+} f(x) = -\infty$, to że f ma asymptotę pionową przechodzącą przez x. Pokaż na przykładzie że dla funkcji nieciągłej $\lim_{x\to x+} f(x) = \infty$ nie implikuje istnienia asymptoty. Sprawdź co powyższe mówi o $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$.

11. Funkcja f jest ciągła w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna poza x_0. Pokaż, że jeśli istnieje $\lim_{\to x_0} f'(x)$, to f jest różniczkowalna w x_0 i f' jest ciągła w x_0.

12. Zakładamy że $a < b$, f i g różniczkowalne na (a, b) i ciągłe na $[a, b]$, Ponadto wiemy że $f(a) = g(a)$, $f'(x) \leq g'(x)$ dla $x \in (a, b)$ i istnieje $x \in (a.b)$ taki że $f'(x) < g'(x)$. Uzasadnij że $f(b) < g(b)$.

13. Dla dowolnego n wylicz wzór (rozwinięcie) Taylora rzędu n dla $f(x) = \frac{1}{x}$ i $f(x) = \log(x)$ w $x_0 = 1$ (chodzi o jawną postać współczynników).

14. Przy pomocy rozwinięć Taylora oblicz następujące granice:

$$\lim_{\to 0} \frac{\cos(x) - \exp(\frac{-x^2}{2})}{x^4},$$

$$\lim_{\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(\sinh(x))}{x^4},$$

$$\lim_{\to 0} \frac{\cos(\sin(x)-x)-1}{\cos(\sinh(x)-x)-1},$$

$$\lim_{\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}).$$

15. Oszacuj z góry maksymalny błąd przybliżeń na podanych przedziałach $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\tan(x) \approx x + \frac{x^3}{3}$ na $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$, $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ na $[-\frac{1}{10}, 0]$.

16. Bazując na tym że log jest funkcją wklęsłą pokaż nierówności $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$. Użyj ich do pokaznia że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$ jest rosnący i ograniczony więc ma granicę (granica to stała γ Eulera-Mascheroniego).

17. Dane są funkcje f i g różniczkowalne n razy w punkcie x. Udowodnij, że

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

18. Niech f będzie funkcją wypukłą na przedziale (a, b). Pokaż że przy ustalonym $x_0 \in (a, b)$ iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest niemalejącą funkcją x na (x_0, b). Pokaż analogiczną własność dla $x \in (a, x_0)$. Wywnioskuj stąd że f ma jednostronne pochodne dla każdego $x_0 \in (a, b)$.

19. Prostą p nazywamy prostą podpierającą dla f w punkcie x_0 jeśli $(x_0, f(x_0)) \in p$ zaś pozostałe punkty wykresu f leżą powyżej p. Bazując na wyniku poprzedniego zadania pokaż że dla funkcja wypukłej f zdefiniowanej na przedziale (a, b) i dowolnego x_0 istnieje prosta podpierająca w x_0. Znajdź proste podpierające dla $f(x) = |x| + \exp(x)$ w $x_0 = 0$.

20. Bazując na poprzednim zadaniu pokaż że funkcja f zdefiniowana na przedziale (a, b) jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy w dowolnym $x_0 \in (a, b)$ istnieje prosta podpierająca dla f. Wywnioskuj stąd że funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy jest ona supremum pewnej rodziny funkcji linowych (dokładniej afinicznych): $f(x) = \sup_{g \in L} g(x)$ gdzie każde z g jest postaci $g(x) = cx + d$. Wskazówka: prosta podpierająca jest wykresem funkcji afinicznej.

21. Niech f będzie funkcją wypukłą na (a, b). Udowodnij nierówność Jensena:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

gdzie $x_i \in (a, b)$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Wskazówka: użyj prostą podpierającą w $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.