Analiza matematyczna 1B, Lista 11

1. Pokaż że

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}=nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2.$$

Wywnioskuj stąd że

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n}-x)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

Wskazówka: Zróżniczkuj dwa razy wzór dwumianowy Newtona względem x i podstaw $(1-x)$ za y.

2. Niech $\epsilon>0$, $\delta>0$ i całkowite $n>0$ będą ustalone. Zakładamy że $h=\frac{b-a}{n}<\delta$ i że f jest funkcją taką że dla $x,y\in[a,b]$ z $|x-y|<\delta$ wynika że $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. Niech $x_k=a+kh$ dla $k=0,\dots,n$. Funkcja g jest zdefiniowana tak że dla $x=x_k$ mamy $f(x)=g(x)$, zaś pomiędzy kolejnymi x_k funkcja g jest liniowa (taką funkcję nazywamy kawałkami liniową). Innymi słowy, wykres g jest sumą odcinków do $p_k=(x_k,f(x_k))$ do $p_{k+1}=(x_{k+1},f(x_{k+1}))$. Uzasadnij że $|f(x)-g(x)|<\epsilon$ dla $x\in[a,b]$. Wywnioskuj stąd że funkcję ciągłą na przedziale domkniętym można z dowolną dokładnością przybliżać funkcjami kawałkami liniowymi.

3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Wskazówka: Użyj nierówności dla logarytmu z zadania 16 listy 10.

4. Kwadrat domknięty $K=[0,1]\times[0,1]=\{(x,y):0\le x,y\le 1\}$ jest sumą pewnej rodziny $A=\{P_\alpha\}$ prostokątów otwartych gdzie $P_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)\times(c_\alpha,d_\alpha)$. Niech x będzie ustalone. Uzasadnij że instnieje $\epsilon>0$ i skończona rodzina prostokątów $A_{x,\epsilon}\subset A$ taka że $(x-\epsilon,x+\epsilon)\times[0,1]\subset\sum_{P_\alpha\in A_{x,\epsilon}}P_\alpha$. Wywnioskuj stąd analog lematu Borela dla kwadratu.

5. Podaj przykład rodziny A odcinków której sumą jest odcinek $[0,1]$, takiej że dokładnie jeden odcinek z rodziny A jest domknięty zaś pozostałe są otwarte i po usunięciu dowolnego odcinka z rodziny A suma pozostałych odcinków nie zawiera odcinka $[0,1]$.

6. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągów funkcyjnych $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ na $[0,1]$, $f_n(x)=\frac{1}{nx}$ na $(0,1]$, $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{x}{k^2})$ na $(-\infty,\infty)$.

7. Podaj przykład ciągu funkcji różniczowalnych f_n i f takich że f_n dąży jednostajnie do f, ale pochodne f_n' nie są zbieżne nawet punktowo. Podobnie, podaj przykład gdzie funkcje są zbieżnie jednostajnie, pochodne są zbieżne punktowo, lecz nie jednostajnie.

8. Uzasadnij nierówność

$$(x+y)^\alpha\le x^\alpha+y^\alpha$$

dla $x,y>0$ i $0\le\alpha\le 1$. Użyj ją do sprawdzenia z definicji że dla $0\le\alpha\le 1$. funkcja $f(x)=x^\alpha$ jest jednostajnie ciągła na $[0,\infty)$.

9. Udowodnij, że funkcja f ciągła na $(-\infty,\infty)$ i mająca granice liczbowe w nieskończoności jest jednostajnie ciągła.

10. Które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe na $(-\infty, \infty)$: $f(x) = |x| \exp(-|x|)$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x * \sin(\sqrt{|x|})$, $f(x) = x * \cos(\frac{1}{\sqrt{|x|}})$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{\sin x^3}{1+x^2}$, $f(x) = \exp(-x)\sin(\exp(x))$, $f(x) = x\exp(-x)\sin(\exp(x))$.
11. Zakładamy że f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) i że $f''(x) > M$ dla $x \in (a, b)$. Uzasadnij że dla dowolnego $x, t \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(y) + (x-y)f'(y) + M(x-y)^2/2$.
12. Sprawdź że gdy f jest wielomianem stopnia co najwyżej 1 to dla $n \leq 1$ zachodzi równość $f(x) = B_n(f, x)$ gdzie $B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{x}) x^k (1-x)^{n-k}$ jest n-tym wielomianem Bernsteina dla f. Uzasadnij że gdy f jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 to $p_n(x) = B_n(f, x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej 2. Podaj przykład że równość $f(x) = B_n(f, x)$ nie musi zachodzić dla wielomianów stopnia d dla $d \geq 2$ i $n \geq d$.
13. Zakładamy że f ciągła na $[0, 1]$, dwukrotnie różniczkowalna na $(0, 1)$ i że $f''(x) > M$ dla $x \in (0, 1)$. Uzadadnij że $f(1/2) - B_n(f, 1/2) \leq \frac{-M}{8n}$.
Komentarz: Oznacza to że wielomiany Bernsteina dla f zbiegają dość powoli do f, często można znaleźć wielomiany dające dużo lepsze przybliżenia.