**Analiza matematyczna 1B, Lista 12**

**1**. Niech $f(x) = (h_1(x), h_2(x))$ będzie zdefiniowaną na wykładzie funkcją ciągłą odwzorowującą odcinek $[0,1]$ na kwadrat $[0,1] \times [0,1]$. Uzasadnij nierówność $|f(x) - f(y)| \leq 3\sqrt{5|x-y|}$ (odznacza to że $f$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{2}$).
Wskazówka: Rozpatrz maksymalne $n$ takie że istnieje $k$ takie że $x, y \in (\frac{k}{9^n}, \frac{k+2}{9^n})$.

**2**. Uzasadnij że istnieje funkcja ciągła odwzorowująca odcinek na sześcian $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ spełniająca warunek Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{3}$.

**3**. Niech $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \sin(4^k x)$. Uzasadnij że $f$ jest ciągła, ale dla dowolnego rzeczywistego $x$ nie istnieje pochodna $f$ w $x$.

**4**. Niech $f$ będzie funkcją z poprzedniego zadania. Uzasadnij że $f$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\log(3)/\log(4)$.
Wskazówka: Rozbij sumę na dwie części, jedną z $4^k < |x-y|$, drugą z pozostałymi $k$. Pierwszą część oszacuj używając pochodną.

**5**. Uzasadnij że poniższe szeregi są bezwzględnie jednostajnie zbieżne: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{x+2^n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 \exp(-nx)$ dla $x \geq 0$.

**6**. Znajdź zbiór tych zespolonych $z$ że poniższy szereg jest zbieżny

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^n}$$

Na których z poniższych zbiorów ten szereg jest zbieżny jednostajnie: $A = \{z : |z| < 1\}$, $B = \{z : |z| > \sqrt{2}\}$, $C = \{z : |z| > 3\}$, $D = \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, a > 1\}$.

**7**. Uzasadnij że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, zaś szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ jest bezwzględnie zbieżny to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_b$ jest zbieżny. Jeśli $a_n$ i $b_n$ są szeregami funkcyjnymi, szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ są zbieżne jednostajnie to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_b$ jest zbieżny jednostajnie.

**8**. Wyznacz zbiór $A$ zespolonych $z$ takich że poniższa granica istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}$$

Uzasadnij że na $A$ ta granica jest funkcją ciągłą. Podobnie dla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{(z-k-il)^3}.$$

**9**. Wyznacz zbiory zespolonych $z$ takich że poniższe szeregi są zbieżne: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z-k}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}$. Czy na obszarze zbieżności szeregi te zadają funkcje ciągłe?

**10**. Uzasadnij że dla $x \in (0,\pi)$ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ jest zbieżny. Czy jest on zbieżny jednostajnie? Czy wyznacza on funkcję ciągłą?

**11**. Uzasadnij że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\sin(\frac{x}{k})$ jest zbieżny dla każdego $x \in (-\pi,\pi)$. Czy jest on zbieżny jednostanie na $(-\pi,\pi)$? Czy jest on zbieżny jednostanie na $[-1,1]$? Czy suma jest funkcją ciągłą?

**12**. Uzasadnij że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{\sqrt{k+x^2}}$ jest zbieżny jednostajnie dla $x \in \mathbb{R}$.

**13**. Które z podanych niżej szeregów są bezwględnie zbieżne: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\log(\exp(n^2-1)+5)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\exp(-\log(n)^2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2-n+5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\log(\log(n))^2 - \frac{1}{\log(n)})$.

**14**. Pokaż, że ciąg $(1+\frac{x}{n})^n \exp(-2x)$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie dla $x \geq 0$.
**15**. Uzasadnij że dla $\Re(s) > 1$ (gdzie $\Re(s)$ oznacza część rzeczywistą $s$) iloczyn $\prod_p (1 - 1/p^s)$ gdzie $p$ przebiega liczby pierwsze jest zbieżny. Ponadto $\prod_p (1 - 1/p^s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Uzasadnij że w podanym obszarze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest różne od zera.