Analiza matematyczna 1B, Lista 13

1. Bazując na wzorze $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wyznacz rozwinięcie $\arctan(x)$ w szereg potęgowy o środku w zerze. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu.

2. Oblicz sumy następujących szeregów: $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$. Wskazówka: zauważ że pierwszy szereg jest pochodną innego szeregu.

3. Znajdź a_n takie że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zdefiniowane dla dowolnego z i dla $z \neq 0$ spełnia $f'(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.

4. Niech $f(z)$ i $g(z)$ będą sumami szeregów potęgowch o środku w zerze. Uzasadnij że jeśli $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ zaś $g'(0) \neq 0$ to $\frac{f(z)}{g(z)}$ rozwija się z szereg potęgowy w pewnym otoczeniu zera.

5. Uzasadnij że następujące szeregi można różniczkować wyraz po wyrazie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx^2)}{n^3}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(x/n)}{n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)$ dla $\Re(x) < 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dla $\Re(s) > 1$.

6. Uzasadnij że następujące funkcje rozwijają się w szereg potęgowy o środku w zerze: $\exp(\tan(x))$, $\log(\cos(x))$, $\log(1+\sin(x))$, $\cos(\sin(x))$.

7. Które z poniższych funkcji na $\mathbb{R}$ rozwijają się w szereg potęgowy o środku w zerze: $|x|$, $f(x) = x^{5/2}$ dla $x \geq 0$ i $f(x) = -(-x)^{5/2}$ dla $x < 0$, $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$ dla $x \geq 0$ i $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ dla $x < 0$. Jeśli rozwinięcie istnieje to je znajdź.

8. Bazując na wzorze $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, i rozwinięciach $\sin(x)$ i $\cos(x)$ znajdź pierwsze trzy niezerowe wyrazy rozwiniecia $\tan(x)$ w szereg potęgowy wokół 0. Porównaj to z metodą opartą na obliczaniu pochodnych.

9. Niech $(a)_k = \prod_{l=1}^{k}(a+k)$. Dla a nie będącego ujemną liczbą całkowitą funkcję H_a definujemy szeregiem

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!(a)_k}$$

Uzasadnij że szereg ten jest zbieżny dla dowolnego zespolonego z i zachodzą równości $(a+1)H_a'(z) = H_{a+1}(z)$, $(z^a H_a(z))' = az^{a-1}H_{a-1}$ dla $a \neq 0$, $zH_a''(z) + (a+1)H_a'(z) - H_a(z) = 0$.

Komentarz. Jest to najprostsza funkcja hipergeometryczna, oznaczana często ${}_1^0H(a,z)$.

10. Niech H_a będzie funkcją zdefiniowną w poprzednim zadaniu zaś $H_{a,n}$ będzie sumą częściową z górną granicą n. Uzasadnij że dla rzeczywistego $a \geq 0$ i $r > 0$ zachodzi równość

$$H_a(r) - H_{a,n}(r) = \sup_{|z| \leq r} |H_a(z) - H_{a,n}(z)|$$

to znaczy że błąd popełniony zastępując $H_a(z)$ przez $H_{a,n}(z)$ dla z z koła $\{z : |z| \leq r\}$ jest oszacowany przez błąd w punkcie r. Oszacuj n potrzebne do tego by błąd popełniony zastępując $H_{\frac{1}{2}}(z)$ przez $H_{\frac{1}{2},n}(z)$ dla z z $|z| \leq 3$ nie przekroczył $\frac{1}{1000}$. Oszacuj $\sup_{|z| \leq 3} H_{\frac{1}{2}}(z)$ z błędem nie przekraczającym $\frac{1}{1000}$.

11. Uzasadnij że szereg $\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ jest zbieżny dla z takich że $|z| = 1$, za wyjątkiem $z = -1$.

12. Niech a_n będzie ciągiem liczb zespolonych. Szereg postaci $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ gdzie s jest liczbą zespoloną nazywamy szeregiem Dirichleta. Pokaż, że jeśli szereg Dirichleta jest zbieżny dla pewnego $s = s_0$, to jest zbieżny bezwględnie dla dowolnego s takiego że $\Re(s) > \Re(s_0)$. Jeśli $\alpha > \Re(s_0)$ to zbieżność jest jednostajnia dla $\Re(s) \geq \alpha$.