Analiza matematyczna 1B, Lista 14

1. Niech
$$H_a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!(a)_k}$$
będzie funkcją z zadania 9 listy 13. Uzasadnij że dla n będącego liczbą naturalną zachodzi nierówniość
$$|H_n(z)|\leq |z|^{-\frac{n}{2}}\exp(2\sqrt{|z|}).$$
Wskazówka: Porównaj szereg $H_n(z_1z_2)$ z szeregiem podwójnym dla $\exp(\sqrt{|z_1|})\exp(\sqrt{|z_2|}$.

2. Niech $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Wyznacz szereg $f(\omega z)+f(\omega^2 z)$ dla $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$, $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

3. Wyznacz szereg $f(z)+f(iz)+f(i^2z)+f(i^3z)$ dla $f(z)=\log(1+z)$, $f(z)=\cosh(z)$, $f(z)=\sinh(z)$.

4. Wyznacz największe R takie że $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ rozwija się w szereg potęgowy na kole o promieniu R i środku $z_0=1+i$. Podobnie dla $z_0=1$.
Wskazówka: $1+z^2=(1+iz)(1-iz)$.

5. Niech $\alpha\in[1,2]$. Uzasadnij że ciąg
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\exp(i\alpha k)$$
jest ograniczony.

6. Niech
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\prod_{k=-n}^{n}(z-k)$$
Uzasadnij że granica istnieje dla każdego $z\in\mathbb{C}$. Przedstaw $\frac{f'(z)}{f(z)}$ jako szereg.

7. Niech f będzie funkcją z poprzedniego zadania. Uzasadnij że $f(z)=\frac{z}{\Gamma(-z)\Gamma(z)}$ gdzie
$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^zn!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}.$$

8. Niech
$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k})$$
będzie pochodną logarytmiczną $\Gamma(z)$. Uzasadnij że $\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z)$.

9. Uzasadnij że $x\in(0,\infty)$ funkcja $\Gamma(x)$ przyjmuje wartości rzeczywiste. Ponadto dla $x\in(0,1)$ jest ona malejąca, zaś na $(2,\infty)$ rosnąca. Na $(1,2)$ funkcja Γ osiąga minimum.

10. Uzasadnij że dla $r\in[0,1)$ i naturalnego m zachodzi nierówność $\sum_{k=1}^{m}\frac{r^k}{k}\leq\log(1-r)$.

11. Uzasadnij że $\phi(z)=1-(1-z)\exp(z)$ rozwija się w szereg potęgowy o wyrazach nieujemnych. Wywnioskuj stąd że $|\phi(z)|\leq|z|^2$ dla $|z|\leq 1$.

12. Liczby Fibonacciego F_n są zdefinowane równościami $F_0=1$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ dla $n\geq 2$. Niech $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n$. Uzasadnij że $h(z)=(z+z^2)h(z)+1$. Użyj tą równość do wyznaczenia $h(z)$ i podania jawnego wzoru dla F_n.