Analiza matematyczna 1B, Lista 15

1. Oblicz całki: $\int \frac{x+2}{(x-3)(x+1)}dx$, $\int \frac{1}{x^3-3x+2}dx$, $\int \frac{1}{x^3-1}dx$.

2. Oblicz całki:

$$\cos(x)\; e^{\sin(x)},$$

$$\frac{(2\,\sqrt{x}+1)\,\cos(\sqrt{x}+x)}{2\,\sqrt{x},}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+5}^2,}$$

$$-5\,\cos(x)^4\,\sin(x).$$

Wskazówka: To są przykłady funkcji dla których łatwo znaleźć odpowiednią zamianę zmiennych.

3. Użyj całkowanie przez części do obliczenia: $\int x^3\log(x)dx$, $\int \left(\frac{\log(x)}{x}\right)^2 dx$, $\int x\arctan(x)dx$, $\int x^3\exp(x^2)dx$.

4. Niech $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, zaś n będzie liczbą naturalną. Podaj wzory rekurencyjne na całkowanie

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}.$$

5. Niech $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)(x-a)^k}$ gdzie $P(a)\neq 0$, $Q(a)\neq 0$. Uzasadnij że współczynnik c_l przy $\frac{1}{(x-a)^l}$ w rozkładzie f na ułamki proste jest zadany wzorem $(k-l)!c_l=\phi^{(k-l)}(a)$ gdzie $\phi(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Wskazówka: Jeśli $\psi(x)=R(x)(x-a)^k$ gdzie R jest k-krotnie różniczkowalne, to $\psi^{(k-1)}(a)=0$, a $\psi^{(k)}(a)=k!R(a)$.

6. Znajdź rozkład $f(x)=\frac{x+2}{x^4-2x^3-3*x^2+4x+4}$ na ułamki proste dwoma metodami: jedną, podaną na wykładzie i drugą polegającą na zapisaniu rozkładu z nieznanymi c_{il}, otrzynaniu układu równań liniowych na c_{il} i rozwiązaniu układu równań.