Analiza matematyczna 1B, Lista 2

1. Udowodnij że $\limsup a_n \leq \sup a_n$. Pokaż przykład niestałego ciągu gdzie zachodzi równość jak i taki że nierówność jest ostra.

2. Udowodnij że $\inf a_n \leq \limsup a_n$. Pokaż przykład niestałego ciągu gdzie zachodzi równość jak i taki że nierówność jest ostra.

3. Udowodnij że jeśli $-\infty < \sup a_n < \infty$, to $\sup a_n + b_n \leq \sup a_n + \sup b_n$ (stosujemy tu konwencję że suma nieskończoności i liczby rzeczywistej to nieskończoność). Pokaż na przykładzie że nierówność może być ostra.

4. Udowodnij że jeśli $0 < \sup a_n < \infty$, $-\infty < \sup b_n < \infty$, to $\sup a_n b_n \leq \sup a_n \sup b_n$. Pokaż na przykładzie że nierówność może być ostra.

5. Udowodnij że jeśli $0 < \limsup a_n < \infty$, $-\infty < \limsup b_n < \infty$, to

$$\limsup(a_n b_n) \leq \limsup a_n \limsup b_n.$$

6. Podaj przykłady ciągów a_n i b_n takich że $\limsup a_n = \infty$, $\limsup b_n = 0$ i $\limsup(a_n b_n) = 0$, $\limsup(a_n b_n) = 1$, $\limsup(a_n b_n) = \infty$ (razem trzy przykłady, po jednym na każdy z wyników).

7. Udowodnij że dla niemalejącego ciągu a_n zachodzi $\sup a_n = \limsup a_n$. Podobnie, dla nierosnącego ciągu a_n pokaż że $\inf a_n = \limsup a_n$.

8. Niech $a_n = (-1)^n/(n+1)$. Z definicji oblicz $\sup a_n$, $\inf a_n$ i $\limsup a_n$.

9. Niech $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Pokaż że ciąg a_n jest rosnący, oblicz $\sup a_n$, $\inf a_n$ i $\limsup a_n$.

10. Niech $a_n = \frac{2n+3}{3n+2}$. Pokaż że że ciąg a_n jest malejący, oblicz $\sup a_n$, $\inf a_n$ i $\limsup a_n$.

11. O ciągu a_n wiadomo że $a_0 = 1/2$ i $a_{n+1} = (1 + 2a_n)/3$. Udowodnij indukcyjnie że a_n jest rosnący. Oblicz $\sup a_n$, $\inf a_n$ i $\limsup a_n$.

12. Dane są funkcje $f(x) = \max(1, -x-1)$, $g(x) = \max(1, x-1)$ gdzie $\max(x, y) = \sup\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y. Pokaż że $\sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x) + g(x)) < \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$

13. Udowodnij że $\limsup \max(a_n, b_n) = \max(\limsup a_n, \limsup b_n)$.

14. Udowodnij że $\liminf \max(a_n, b_n) \geq \max(\liminf a_n, \liminf b_n)$. Pokaż na przykładzie że nierówność może być ostra.

15. Niech $a_n = (1+1/n)^n$ dla $n = 1, \ldots$. Pokaż że a_n jest rosnący. Wskazówka: użyj wzór dwumianowy i pokaż że każdy wyraz z osobna jest rosnący.

16. Udowodnij nierówność:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

Wywnioskuj stąd nierówność Schwarza:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

17. Niech $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$. Pokaż że $\sup a_n < 2$. Wskazówka: $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.