

### Analiza matematyczna 1B, Lista 3

1. Z definicji oblicz

$$\lim \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n + 1}$$

2. Pokaż że dla  $q > 1$  ciąg  $q^{-n}$  na granicę 0. Wskazówka: Użyj nierówność Bernoulliego dla  $q = (1 + r)$ .

3. Bazując na wzorach z zadań z poprzedniej listy i z wykładu oblicz  $\liminf$  i  $\limsup$  dla następujących ciągów:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ,  $n(1 - \frac{1}{n})$ ,  $\frac{n^3 - n + 3}{n^2 + n + 1}$ .

4. Uzasadnij że następujące ciągi mają granice (nie obliczaj tych granic):  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ,  $\prod_{k=1}^n (1 - \frac{1}{(k+1)^3})$ .

5. Dla  $n$  postaci  $n = 2^m$  bierzemy  $a_n = -1$ , zaś dla pozostałych  $n$  bierzemy  $a_n = 1$ . Niech  $b_n = \prod_{j=1}^n a_k$ , zaś  $c_n = (-1)^n + \frac{b_{n+1} - b_n}{3}$ . Jak wygląda zbiór punktów skupienia ciągu  $c_n$ .

6. Podaj taki ciąg taki że zbiorem jego punktów skupienia jest  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

7. Podaj taki ciąg taki że zbiorem jego punktów skupienia jest  $[0, 1] \cup [2, 3]$  (suma przedziałów).

8. Czy przedział otwarty  $(0, 1)$  może być zbiorem punktów skupienia jakiegoś ciągu. Uzasadnij.

9. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

10. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^2}$$

11. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{n + k}$$

12. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n + k)^2}$$

13. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}}$$