Analiza matematyczna 1B, Lista 4

1. Oblicz $\lim(3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. Oblicz $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{2^k}}$.

3. Oblicz $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ jako funkcję $x\in\mathbb{R}$.

4. Niech $a_{n,m}=\frac{n}{n+m+1}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}a_{n,m}$$

i

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}a_{n,m}.$$

5. Udowodnij że z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

6. Niech $b_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n a_k$. Udowodnij że $\limsup b_n\le\limsup a_n$. Wywnioskuj stąd że jeśli ciąg a_n jest zbieżny to zachodzi $\lim a_n=\lim b_n$. Pokaż na przykładzie że a_n może być rozbieżny a b_n zbieżny.

7. Uzasanij że jeśli $a_n\le b_n$ oraz zarówno a_n jak i b_n jest zbieżne to $\lim a_n\le\lim b_n$. Pokaż że $\lim\max(a_n,b_n)=\max(\lim a_n,\lim b_b)$.

8. Niech $a>0$ będzie ustaloną liczbą. $x_0>0$ jest dowolne, zaś pozostałe wyrazy ciągu x_n są zdefiniowane wzorem $x_{n+1}=\frac{2x_n}{3}+\frac{a}{3x_n^2}$. Uzasadnij że ten ciąg jest zbieżny i oblicz jego granicę.

9. Niech a będzie ustaloną liczbą dodatnią. Ciag x_n definiujemy rekurencyjnie wzorem $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$ (pozostałe wyrazy zależą od wyboru x_0). Obliczyć $x_{n+1}-\frac{1}{a}$ w zależności od $x_n-\frac{1}{a}$. Wyznaczyć zbiór tych x_0 dla których ciąg x_n jest zbieżny. Komentarz: Bazując na tym zadaniu można sprowadzić przybliżone dzielenie do wielokrotnego mnożenia

10. Niech a będzie ustaloną liczbą dodatnią. Ciag x_n definiujemy rekurencyjnie wzorem $x_{n+1}=x_n(3-ax_n^2)/2$ (pozostałe wyrazy zależą od wyboru x_0). Zakładając że ciąg jest zbieżny obliczyć granicę. Podać (niekoniecznie najlepszy) warunek na x_0 wystarczający do zbieżności.

11. Uzasadnij że szereg $\sum_{n=0}^\infty\frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny.

12. Uzasadnij że szereg $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ jest zbieżny.

13. Uzasadnij że szereg $\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n+1}$ jest zbieżny.

13. Niech $e(x,k)=\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}$. Pokaż że przy ustalonym k zachodzi nierówność $e(\frac{x+y}{2},k)\le\frac{1}{2}(e(x,k)+e(y,k))$ dla $x,y\ge0$. Wywnioskuj stąd że $\exp(x+y)\le\frac{1}{2}(\exp(x)+\exp(y))$ dla $x,y\ge0$.

14. Używając definicę $\exp(z)$ jako szeregu uzasadnij że $|\exp(z)-(1+z)|\le|z|^2$ dla zespolonego z takiego że $|z|\le1$. Przy pomocy tej nierówności oblicz $\lim\exp(\frac{1}{n+1})$ i $\lim n(\exp(\frac{1}{n+1})-1)$.

15. Udowodnij że jeśli z_n jest zbieżnym ciągiem liczb zespolonych to $|z_n|$ jest zbieżnym ciągiem liczb rzeczywistych i $\lim|z_n|=|\lim z_n|$.

16. Dla ustalonego zespolonego a ciąg z_n definiujemy wzorem $z_n=a^n$. Wyznaczyć zbiór tych a dla których ten ciąg jest zbieżny (ma skończoną granicę).

17. Znak liczby zespolonej $\mathrm{sign}(z)$ definiujemy biorąc $\mathrm{sign}(0)=0$ oraz $\mathrm{sign}(z)=\frac{z}{|z|}$ dla $z\ne0$. Pokaż na przykładzie że istnieje zbieżny ciąg liczb zespolonych z_n taki że $\mathrm{sign}(\lim z_n)\ne\lim\mathrm{sign}(z_n)$. Podaj prosty warunek wunek wystarczający by $\mathrm{sign}(\lim z_n)=\lim\mathrm{sign}(z_n)$.

18. Udowodnij że każda liczba zespolona posiada pierwiastek kwadratowy, tzn. przy ustalonym zespolonym a równanie $z^2 - a = 0$ posiada zespolone rozwiązanie.
19. Niech $\phi(z) = \frac{1-z}{1+z}$. Uzasadnij że jeśli $z = a + bi$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $a > 0$ to $|\phi(z)| < 1$.
20. Udowodnij że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ jest zbieżny i $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)+(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$.